Полиномиальные методы прикладного анализа
(памяти Я.В. Радыно посвящается**)**

Багаль Екатерина Александровна
УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина"

По мере обобщения в функциональном анализе идей математического анализа, высшей алгебры и аналитической геометрии, численные (компактные) методы прикладного анализа банаховых отображений все чаще вытесняются полиномиальными (предкомпактными) методами. Использование в качестве δ-приближения корня операторного уравнения элемента из всюду плотного множества в пространстве решений ведет к необходимости построения δ-сети в области существования корня. Это обстоятельство разрушает стереотип о первичности дискретизации пространства решений при определении корней функциональных уравнений, то есть параметр дискретизации должен зависеть от заданной точности приближения корня.

Численный анализ уравнений с интегро-дифференциальным оператором основан на суммарно-разностных схемах Самарского [1, с. 259–425] и проекционных методах Галеркина [2, с. 190–198], которые не являются итерационными в смысле рекуррентной дискретизации пространства решений [2, с. 194]. Не менее важной проблемой методов Галеркина является узкая область их применения, так как пространства решений и образов изучаемых уравнений гильбертовы. Про пространство решений уравнений, исследуемых с помощью суммарно-разностных схем, можно лишь сказать, что оно достаточно гладкое [1, с. 262] (для надежности – это пространство бесконечно дифференцируемых функций).

В работе [1, с. 262–272] рассматривается интегро-интерполяционный метод построения разностной схемы (на равномерной сетке с заданным параметром дискретизации) решения краевой задачи для ОДУ второго порядка

$$(p(x)\, u'(x))' - q(x)\, u(x) + f(x) = 0,\ x \in [\,0,\, b] \tag{1}$$

с двумя дополнительными условиями на концах отрезка интегрирования

$$-p(0)\, u'(0) + \beta\, u(0) = \mu, \tag{2}$$

$$u(b) = u_b. \tag{3}$$

В физике краевая задача (1–3) описывает распределение температуры $u(x)$ в стержне длины b, на одном конце которого ($x = b$) поддерживается заданная температура μ, а на другом ($x=0$) происходит теплообмен с окружающей средой с тепловым потоком $-p(x)\, u'(x)$.

Для решения этой линейной краевой задачи вводится ряд ограничений, обеспечивающих существование достаточно гладкого корня, к которому можно приблизиться (по какой норме?) с помощью разностной схемы. Добавив в уравнение (1) слагаемые с $u'(x)$, $u''(x)$ или изменив дополнительные условия, алгоритм решения КЗ полностью меняется.

Разностные и суммарные (используемые для решения уравнений с интегральным оператором) схемы даже при решении линейных уравнений противоречат основным постулатам функционального анализа, где пространство решений определяется исходя из свойств оператора $F : U \to V$ уравнения [3, с. 76]

$$F(u) = 0, \tag{4}$$

в который входят и дополнительные условия исследуемой задачи.

Например, пространством решений краевой задачи (1–3) является множество U – подмножество $C^2_{[0,b]}$ дважды дифференцируемых на отрезке $[0, b]$ функций, удовлетворяющих краевым условиям (2-3).

Суммарно-разностные методы (применимые в основном для решения уравнений с линейным оператором) настолько разрознены и далеки от функционального анализа, что физикам трудно не только вникнуть в алгоритм их решения, но и использовать полученное приближение (по какой норме?) корня в дальнейших исследованиях. Требуется разработать алгоритм, основанный на методах функционального анализа, вычисляющий приближенное значение корня в виде элемента из всюду плотного множества пространства решений. Для уравнения (4) с не обязательно линейным интегро-дифференциальным оператором F пространством решений является $U \subset C^k_{[a,b]}$, где $k = 0, 1, \dots$ (параметр k зависит от порядка производной искомой функции в F и может быть значительно больше двух).

Приближение корней функциональных уравнений удобнее всего искать в виде полинома над степенным или тригонометрическим базисом всюду плотного множества многочленов в пространстве решений. В банаховом пространстве $C^k_{[a,b]}$ полная система степенных или тригонометрических одночленов не является базисом. Однако замыкание линейного многообразия над этой системой по соответствующей норме есть все пространство $C^k_{[a,b]}$ и любой предельный элемент из $C^k_{[a,b]}$ можно с заданной точностью приблизить последовательностью многочленов [4, с. 480], сходящихся к нему по норме $C^k_{[a,b]}$.

Рассмотрим, как находится приближение корня нелинейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\left(\frac{p(x)}{u'(x)}\right)' + \frac{q(x)}{u^2(x)} + f(x) = 0, x \in [0, b] \qquad (5)$$

с двумя дополнительными условиями

$$\frac{p(0)}{u'(0)} + \eta\, u(0) = \mu, \qquad (6)$$

$$u(b) = u_b. \qquad (7)$$

Для тестирования алгоритма выберем $b = 1$, $u(x) = e^x$, $p(x) = e^{-x}$, $q(x) = 1$, $\eta = 1$, тогда $f(x) = e^{-2x}$, $\mu = 1$ и $u_b = e$. Решение КЗ (5–7) параметрическим методом Ньютона [5, с. 148–151] будем искать в виде степенного многочлена. Основными компонентами алгоритма итеративного поиска δ-приближения корня являются модули вычисления невязки уравнения и взятие производной Фреше оператора F краевой задачи на приближенном решении

$${}^n u(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n. \qquad (8)$$

Производная Фреше компонуется производными Гато, играющими роль частных производных по направлениям итерационного базиса. Предлагаемый итерационный метод соответствует теории Канторовича о локализации корня нелинейного уравнения вблизи определенного приближения [3, с. 140–142]. Радиус области притяжения корня $u(x) = e^x$ тестового примера больше 1, поэтому найти нуль-приближение, с которого ПМН сходится к этому корню достаточно просто (например, ${}^1u(x) = x$).

Так как изучение нелинейных операторных уравнений значительно отличается от исследования линейных уравнений, процесс нахождения всех корней краевой задачи (5–7) может быть продолжен. Чтобы оказаться в области притяжения следующего корня требуется «отступить» от найденного корня на расстояние более 1.

Используя нуль-приближение ${}^{1}u(x) = 3-x,$ было получено приближенное решение с параметром дискретизации $z = 17$:

$$\begin{gathered}
{}^{16}u(x) = 3{,}15807925058189855820993578557386646308567772901815-\\
-0{,}86350146701965647643648201384385027622435409552394\ x+\\
+0{,}84194513489400115978114473562267519717921567237965\ x^{2}-\\
-0{,}91885269323800150393598440477334409753375070611921\ x^{3}+\\
+1{,}16576228268005440549004456533306519403640833546356\ x^{4}-\\
-1{,}58911901532319628603921240681973373383975006394500\ x^{5}+\\
+2{,}22712035376792293835338197854376209696275185072095\ x^{6}-\\
-3{,}10582966634561692577411989311907106389875749754173\ x^{7}+\\
+4{,}13847295853796786128409483413289296757142101696035\ x^{8}-\\
-5{,}02740769108174103809962881673595324226434100379151\ x^{9}+\\
+5{,}31093651917933162069204073593243028910594883140950\ x^{10}-\\
-4{,}66540989599972363095051216201306003784222887504520\ x^{11}+\\
+3{,}26008267536882633656401256906355678184403734723322\ x^{12}-\\
-1{,}72268428500986350002334916905682035376950829809608\ x^{13}+\\
+0{,}64194291749826091987192286180609376166029696374090\ x^{14}-\\
-0{,}14959879584614917234503094503376963275432892959830\ x^{15}+\\
+0{,}01634324581472996871802921673992218443850881643464\ x^{16}
\end{gathered} \tag{9}$$

с нормой невязки $\varepsilon = 2{,}5\ 10^{-5}$ на сетке с шагом $h = 10^{-5}$ и погрешностью дополнительного условия $\eta = 2{,}8\ 10^{-6}$. Параметрический метод Ньютона [3, с. 143–146], начиная с приближения ${}^{16}u(x)$, сходится к корню с демпфирующим множителем $\beta = 1$.

Отметим, что в отличие от приближения первого корня с $z = 10$, по которому согласно модифицированной теореме Ньютона-Канторовича [3, с. 141] можно сделать вывод о существовании области его локализации, для аналогичного утверждения относительно второго корня потребуется взять параметр дискретизации пространства решений $z \geq 33$.

Опишем в среде программирования Maple один из основных модулей программы решения функциональных уравнений с интегро-дифференциальным оператором – функцию определения нормы невязки на приближении ${}^{n}u(x)$ с вектором коэффициентов *Ku*,:

```
> KPU(Ku,Kpu):  # определение коэффициентов u'(x)
NN:=0: m:=*****; hm:=(b-a)/m;
for i from 0 to m-1 do   # точки x могут быть точками сетки отрезка [a, b], а затем выбираться случайным образом до установления статистической сходимости
   x:=a+i*hm:       # функция ZM(x,Ku) вычисляет значение nu(x) в точке x
Nn:=(p(x+T)/ZM(x+T,Kpu)-p(x-T)/ZM(x-T,Kpu))/(2*T)+1/ZM(x,Ku)^2+exp(-2*x):
if abs(Nn)>NN then NN:=abs(Nn): fi: od:
> pr:=p(0)/(2-U(1)); pru:=ZM(0,Kpu); Np:=abs(pr-pru);
> NNew:=max(NN,Np);
```

Отметим, что норма невязки на приближении ${}^{32}u(x)$ равна $\varepsilon = 2{,}6\ 10^{-11}$.

Более сложные отображения пространства решений у интегро-дифференциальной системы уравнений [5, с. 192] относительно неизвестных функций $u(x)$ и $v(x)$, $x \in [0;\ 1]$

$$\begin{cases} F(u,v) \equiv \sqrt{e(x+0{,}5)u'(x)} + \displaystyle\int_0^1 \frac{(2u(t)+e\,t\,x)\,dt}{5\exp(v'(t))+x-4} - 2u(x) + e(x^2-1) = 0; \\ G(u,v) \equiv 5(u''(x))^{v'(x)} - (x+5)v'(x) + v(x) - 5(\ln 5+1) = 0 \end{cases} \tag{10}$$

с тремя дополнительными граничными условиями $u(0) = 0, u(1) = e, v(0) = 5\,ln5$, из которых следует, что по $u(x)$ задана краевая задача Дирихле, а по $v(x)$ – задача Коши, или интегро-дифференциального уравнения [3, с. 228] относительно функции двух переменных $u(x,y)$

$$F(u) \equiv e^{\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\,\partial y}} + \iint\limits_X \frac{ln\dfrac{\partial^2 u(t,s)}{\partial t\,\partial s}\,dt\,ds}{1 - ln\dfrac{\partial^2 u(x,s)}{\partial x\,\partial s}\dfrac{\partial^2 u(t,y)}{\partial t\,\partial y}} - f(x,y) = 0, \qquad (11)$$

где

$$f(x,y) = (1 + x + y)\,ln\frac{(3 + x + y)^{3+x+y}(1 + x + y)^{1+x+y}}{(2 + x + y)^{2(2+x+y)}} + e^{-(x+y)} - 1, \qquad (12)$$

удовлетворяющего на границе области $X = \{(x, y){:}\, 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$ условиям

$$u(x, 0) = x - x^2 + e^{-x},\ u(x, 1) = x - x^2 + e^{-x-1},$$
$$u(0, y) = -y + y^2 + e^{-y},\ u(1, y) = -y + y^2 + e^{-y-1},$$

которые также решаются параметрическим методом Ньютона с использованием производной Фреше оператора уравнения на многочлене-приближении.

Суть полиномиальных методов состоит в том, что наряду с представлением корня функционального уравнения в виде ряда, сходящегося по норме пространства решений, аппроксимация изучаемого оператора уравнения на многочлене осуществляется с максимально возможной для интегрированной среды программирования точностью. По теореме 2 [6, с. 131] дифференцируемое отображение имеет единственное непрерывное продолжение на замыкание множества многочленов и это продолжение дифференцируемо.

Отметим, что алгоритм приближенного вычисления первой и второй производных Фреше не зависит от вида отображения, то есть полиномиальное дифференцирование банаховых отображений осуществляется подобно численному дифференцированию функций из $C^1_{[a,b]}$ методом конечно-разностных отношений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский, А. А. Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М. : Наука, 1989. – 432 с.

2. Красносельский, М. А. Приближенное решение операторных уравнений / М. А. Красносельский, Г. М. Вайнико, П. П. Забрейко. – М. : Наука, 1969. – 456 с.

3. Морозов, В. В. Прикладной анализ и программирование / В. В. Морозов. – Брест : Брест. гос. ун-т, 2012. – 246 с.

4. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М. : Наука, 1989. – 624 с.

5. Морозов, В. В. Полиномиальные методы прикладного анализа / В. В. Морозов. – Брест : Брест. гос. ун-т, 2011. – 200 с.

6. Антоневич, А. Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения / А. Б. Антоневич, Я. В. Радыно. 2-е изд., перераб. и доп. – Минск : БГУ, 2006. – 430 с.