Полиномиальное решение дифференциальной задачи Коши

Багаль Екатерина Александровна

УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина"

Рассмотрим задачу нахождения непрерывно дифференцируемой на отрезке $a \le x \le b$ вектор-функции $u(x) = \{u^1(x), u^2(x), \dots, u^m(x)\}$, удовлетворяющей нелинейному уравнению с дифференциальным оператором

$$\frac{du(x)}{dx} = f(x, u(x)),\ x \in [a, b] \tag{1}$$

и граничному условию $u(a) = u_a$ или аналогичной системе ОДУ

$$\frac{du^i(x)}{dx} = f_i(x, u^1(x), \dots, u^m(x)), x \in [a, b] \tag{2}$$

с заданными начальными условиями $u^i(a) = u^i_a$, $i = 1, \dots, m$.

Оператор F задачи Коши имеет вид

$$F(u) \equiv \frac{du(x)}{dx} - f(x, u),\ u(a) = u_a. \tag{3}$$

Решим задачу Коши для дважды дифференцируемой по $u \in D$ функции $f(x, u)$ с $m = 1$, $a = 0$, $b = 1$ параметрическим методом Ньютона [1, с. 148].

Алгоритм поиска корня разбивается на несколько этапов:

1. Нанесем на отрезок $[0; 1]$ чебышевскую сетку с параметром дискретизации $z = n + 1$. Используя интерполяционный многочлен Лагранжа сеточной функции ${}^zU = \{u_a, u_1, \dots, u_n\}$, введем нулевое приближение ${}^nu_0(x)$ с ${}^nu_0(a) = u_a$ и определим функцию невязки $F({}^nu(x))$ при ${}^nu(x) \equiv {}^nu_0(x)$.

2. Норму невязки (3) на ${}^nu(x)$ оценим с шагом $h = 1/H$, $H \ge 10^3$

$$||F({}^nu(x))||_C \ge \max_{x_i} |F({}^nu(x_i))| = \max_{x_i} |{}^nu'(x_i) - f(x_i, {}^nu(x_i))|,$$

где точки сетки $x_i = ih$, $i = 1, \dots, H$.

Затем H раз точку $x_i \in [0; 1]$ выберем случайным образом и проверим будет ли $|{}^nu'(x_i) - f(x_i, {}^nu(x_i)|$ превышать найденную норму. При сходимости значений нормы перейдем к следующему пункту (иначе увеличим H).

3. Построим фрешиан отображения $F : P^n_{[a,b]} \to C_{[a,b]}$. Производные Гато по итеративному базису с $j = 1, \dots, n$ найдем по формуле [1, с. 133]. Производная по нулевому вектору базиса не используется так как значение искомой функции $u(x)$ в точке x_0 задано $u(a) = u_a$.

Для вычисления многочлена поправки ${}^n\Delta u(x)$ из линеаризованного уравнения (4) найдем конечную аппроксимацию F' в точках сетки ($n := n + 1$) и решим ЛСАУ относительно значений вектора $({}^n\Delta u(x_j), j = 1, \dots, n)$.

4. Вторую производную Фреше отображения F найдем аналитически и оценим ее s-грань.

При выполнении условия одного из поставленных критериев логическая функция *КОР* по аналогии с решением НСАУ [1, с. 152] завершает вычислительный процесс. Иначе

5. Находим следующее итерационное приближение по формуле ${}^nu_{k+1} = {}^nu_k + \beta_k\, {}^n\Delta u_k$, где ${}^n\Delta u_k$ получено из линеаризованного уравнения

$$F'({}^nu_k)\, {}^n\Delta u_k = -F({}^nu_k). \tag{4}$$

Обозначим ${}^nu(x) \equiv {}^nu_{k+1}(x)$ и определим функцию $F({}^nu(x))$.

Переход к 2.

В качестве примера рассмотрим полиномиальное решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$F(u) \equiv \frac{du(x)}{dx} - f(x, u) = 0,\ x \in [0; 1], \tag{5}$$

где $f(x, u) = \dfrac{u^2}{xe^x} + e^x$, с начальным условием $u(0) = 0$.

Чтобы найти корень (5) методом Рунге-Кутта потребуется произвести некоторые преобразования отображения F, так как в любой области

$$D_r = \{(x, u) : 0 \le x \le 1,\ ||u(x) - u(0)|| < r\}$$

функция $f(x, u)$ не ограничена, то есть не выполнены условия теоремы о существовании решения задачи Коши.

Присвоив искомой функции $u(x)$ в точке $x = 0$ заданное начальное значение $u_0 = 0$, мы тем самым изолировали сегмент сетки чебышева ${}^c\Omega_ч$

$${}^n\Omega_ч = \{x_i = \frac{1}{2}\left(1 - q\cos\frac{2i+1}{2(n+1)}\pi\right), i = \overline{0,n}\},\ \text{где}\ q = \left(\cos\frac{\pi}{2(n+1)}\right)^{-1} \tag{6}$$

(заданной на отрезке $[(1 - q)/2, (1 + q)/2]$), где с любым n функция $f(x, u)$ не ограничена. Сейчас при существовании решения (5) его можно найти полиномиальным методом.

Приведем рекомендуемые тексты подпрограмм вычисления коэффициентов интерполяционного многочлена *VKU* и вектора невязки *VVN* отображения *F*.

```
Procedure VKU(U:VE; Var Ku:VE);   {ИСП BPW}
 Var x,q: Extended; i,j: Integer;
 Begin
 q:=1/cos(pi/2/(n+1)); {построение сетки Чебышева на отрезке [0; 1]}
 For i:=0 to n do  Zx[i]:=(1-q*cos((2*i+1)/2/(n+1)*pi))/2;
 For i:=0 to n do begin
     x:=Zx[i];              {матрица Вандермонда на чебышевской сетке}
    W[i,0]:=1;
    For j:=1 to n do  W[i,j]:=W[i,j-1]*x;
                      end;
 RLS(0,n,W,U,Ku); {вычисление коэффициентов многочлена Лагранжа}
 End;

Procedure VVN(U:VE; Var VN:VE);      {ИСП BPW}
Var i: Integer; x,y: Extended;
 Begin
  VKU(U,Ku);
  VKP(Ku,Kp);  {вычисление коэффициентов производной многочлена}
  for i:=1 to n do begin                {вычисление вектора невязки VN}
    x:=Zx[i]; y:=ZM(x,Ku);        {ZM – значение многочлена в точке x}
    VN[i]:=ZM(x,Kp)-f(x,y);              {аппроксимация отображения F}
                    end;              {завершение инструкции i-счетчика}
 End; {вычисления вектора невязки VN}
```

Корень (4) локализован в области $||u(x) - {}^{12}u_л(x)|| \le \delta = 10^{-10}$, где

$${}^{12}u_л(x) = 1{,}00000000\ldots\, x + 1{,}00000000001\ldots\, x^2 + 0{,}4999999998\ldots\, x^3 +$$
$$+ 0{,}16666666828\ldots\, x^4 + 0{,}04166665778\ldots\, x^5 + 0{,}0083333656\ldots\, x^6 +$$
$$+ 0{,}00138880826\ldots\, x^7 + 0{,}00019855225\ldots\, x^8 + 0{,}00002463439\ldots\, x^9 +$$

$$+\ 0{,}00000289117\ldots\ x^{10} + 0{,}00000020551\ldots\ x^{11} + 0{,}00000004531\ldots\ x^{12}.$$

Отметим, что сеточные методы поиска корней задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с дополнительными условиями при неограниченной правой части (1) основаны на регуляризации дискретного оператора проектирования $\overset{n}{\underset{U}{\Pi}} R$, которая нарушает устойчивость вычислительного процесса. Чтобы найти приведенный результат сеточным методом, потребовалась бы сетка с шагом $h < 10^{-3}$, что привело бы к обращению матрицы порядка $n > 1000$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Морозов, В. В. Полиномиальные методы прикладного анализа / В. В. Морозов. – Брест : Брест. гос. ун-т, 2011. – 200 с.