Априорные оценки погрешности в «ослабленной» норме гильбертова пространства для явного итерационного метода решения некорректных задач

Чернякевич Дмитрий Михайлович

УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина"

Решается линейное уравнение $Ax = y_\delta$ с действующим в гильбертовом пространстве H ограниченным, положительным, самосопряженным оператором, в предположении, что $0 \in SpA$, однако, вообще говоря, не является его собственным значением. Здесь $\|y - y_\delta\| \le \delta$. При сделанных предположениях задача о разрешимости $Ax = y_\delta$ является некорректной. Если же при точной правой части y точное решение уравнения все же существует и единственно, то для его отыскания применим явный метод итераций

$$x_{n+1,\delta} = \left(E - \alpha A^2\right)x_{n,\delta} + \alpha A y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0, \tag{1}$$

где

$$0 < \alpha \le \frac{5}{4\|A\|^2}. \tag{2}$$

Исследуем сходимость метода итераций (1) в «ослабленной» (энергетической) норме гильбертова пространства: $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$, где $x \in H$.

Справедлива

Теорема 1. *Итерационная процедура* (1) *при условии* (2) *сходится в энергетической норме, если число итераций* n *выбирать так, чтобы* $n^{1/4}\delta \to 0$, $n \to \infty$, $\delta \to 0$. *Оценка погрешности для метода* (1) *имеет вид*

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A \le 2n^{1/4}\alpha^{1/4}\delta + (4n\alpha e)^{-1/4}\|x\|, \quad n \ge 2. \tag{3}$$

Доказательство. В [1] показано, что $x - x_n = \; = A^{-1}\left(E - \alpha A^2\right)^n y = \left(E - \alpha A^2\right)^n x$. Воспользовавшись определением энергетической нормы и интегральным представлением самосопряженного оператора, запишем

$$\|x - x_n\|_A^2 = \left(A\left(E - \alpha A^2\right)^n x, \left(E - \alpha A^2\right)^n x\right) = \int_0^M \lambda\left(1 - \alpha\lambda^2\right)^{2n} d(E_\lambda x, x), \; \|A\| = M.$$

Для положительной подынтегральной функции $f(\lambda) = \lambda\left(1 - \alpha\lambda^2\right)^{2n}$ при условии (2) справедлива оценка (см. подраздел 1.1.3 из [1]) $\max\limits_{\lambda \in [0, M]} |f(\lambda)| \le (4n\alpha e)^{-1/2}$. Следовательно, $\|x - x_n\|_A^2 \le (4n\alpha e)^{-1/2}\|x\|^2$, $\|x - x_n\|_A \le (4n\alpha e)^{-1/4}\|x\|$. Отсюда $\|x - x_n\|_A \to 0$, $n \to \infty$. Оценим $\|x_n - x_{n,\delta}\|_A$, имеем

$$\|x_n - x_{n,\delta}\|_A^2 = \int_0^M \lambda^{-1}\left[1 - \left(1 - \alpha\lambda^2\right)^n\right]^2 d\left(E_\lambda(y - y_\delta), y - y_\delta\right).$$

Оценим сверху подынтегральную функцию $g_n(\lambda)=\lambda^{-1}\left[1-\left(1-\alpha\lambda^2\right)^n\right]^2 \ge 0$ при условии (2). Имеем $g_n(\lambda)=\lambda^{-1}\left[1-\left(1-\alpha\lambda^2\right)^n\right]\left[1-\left(1-\alpha\lambda^2\right)^n\right]$. Так как $\lambda^{-1}\left[1-\left(1-\alpha\lambda^2\right)^n\right]\le\left(\frac{5}{4}\right)^{1/2}2(n\alpha)^{1/2}$ при $n\ge1$, $\lambda^{-1}\left[1-\left(1-\alpha\lambda^2\right)^n\right]\le 2(n\alpha)^{1/2}$ при $n\ge2$ и $\left|1-\left(1-\alpha\lambda^2\right)^n\right|\le 2$, то $g_n(\lambda)\le\left(\frac{5}{4}\right)^{1/2}4(n\alpha)^{1/2}$ при $n\ge1$, и $g_n(\lambda)\le 4(n\alpha)^{1/2}$ при $n\ge2$. Следовательно, при условии (2)

$$\left\|x_n-x_{n,\delta}\right\|_A\le\left(\frac{5}{4}\right)^{1/4}2n^{1/4}\alpha^{1/4}\delta,\ n\ge1,\quad \left\|x_n-x_{n,\delta}\right\|_A\le 2n^{1/4}\alpha^{1/4}\delta,\ n\ge2.$$

Поскольку $\left\|x-x_{n,\delta}\right\|_A\le\left\|x-x_n\right\|_A+\left\|x_n-x_{n,\delta}\right\|_A\le\left\|x-x_n\right\|_A+2n^{1/4}\alpha^{1/4}\delta,\quad n\ge2$ и $\left\|x-x_n\right\|_A\to0,\ n\to\infty$, то для сходимости $\left\|x-x_{n,\delta}\right\|_A\to0,\ n\to\infty$, достаточно, чтобы $n^{1/4}\delta\to0$, $n\to\infty$, $\delta\to0$. Таким образом, если в процессе (1) выбрать число итераций $n=n(\delta)$, зависящим от δ так, чтобы $n^{1/4}\delta\to0$, $n\to\infty$, $\delta\to0$, то получим регуляризованный метод, обеспечивающий сходимость к точному решению в энергетической норме. Теорема 1 доказана.

Оптимизируем полученную оценку (3) по n, т. е. при заданном δ найдем такое значение числа итераций n, при котором оценка погрешности становится минимальной. Приравняв к нулю производную по n от правой части равенства (3), получим априорный момент останова метода (1): $n_{\text{опт}}=2^{-3}\alpha^{-1}e^{-1/2}\|x\|^2\delta^{-2}$. Подставив $n_{\text{опт}}$ в (3), найдем ее оптимальное значение: $\left\|x-x_{n,\delta}\right\|_A^{\text{опт}}\le 2^{5/4}e^{-1/8}\delta^{1/2}\|x\|^{1/2}$, $n\ge2$. Очевидно, что для уменьшения объема вычислительной работы следует брать α возможно большим, удовлетворяющими условию (2), и так, чтобы $n_{\text{опт}}\in Z$.

Рассмотрим вопрос о том, когда из сходимости в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства H. Эти условия дает

Теорема 2. *Если выполнены условия* 1) $E_\varepsilon x_{n,\delta}=0$, 2) $E_\varepsilon x=0$, *где* $E_\varepsilon=\int_0^\varepsilon dE_\lambda$, ε – *фиксированное положительное число* $(0<\varepsilon<\|A\|)$, *то из сходимости* $x_{n,\delta}$ *к* x *в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства*.

Доказательство. Так как по условию теоремы 2 $E_\varepsilon x_{n,\delta}=0$ и $E_\varepsilon x=0$, то имеем $E_\varepsilon(x_{n,\delta}-x)=0$ и $\left(E_\varepsilon(x_{n,\delta}-x),x_{n,\delta}-x\right)=0$, т. е. $\int_0^\varepsilon d(E_\lambda\,(x_{n,\delta}-x),x_{n,\delta}-x)=0$.

Следовательно, $\int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\lambda} d(E_\lambda (x_{n,\delta} - x), A(x_{n,\delta} - x)) = 0$. Тогда получим, что

$$\|x_{n,\delta} - x\|^2 = \int_0^{M} \frac{1}{\lambda} d(E_\lambda (x_{n,\delta} - x), A(x_{n,\delta} - x)) =$$

$$= \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\lambda} d(E_\lambda (x_{n,\delta} - x), A(x_{n,\delta} - x)) + \int_{\varepsilon}^{M} \frac{1}{\lambda} d(E_\lambda (x_{n,\delta} - x), A(x_{n,\delta} - x)) =$$

$$= \int_{\varepsilon}^{M} \frac{1}{\lambda} d(E_\lambda (x_{n,\delta} - x), A(x_{n,\delta} - x)) \le \frac{1}{\varepsilon} \|x_{n,\delta} - x\|_A^2 .$$

Теорема 2 доказана.

Замечание. *Так как* $x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E - \left(E - \alpha A^2\right)^n\right] y_\delta$, *то для того, чтобы* $x_{n,\delta}$ *удовлетворяло условию* $E_\varepsilon x_{n,\delta} = 0$, *достаточно потребовать, чтобы* $E_\varepsilon y_\delta = 0$. *Таким образом, если* $E_\varepsilon x = 0$ *и* $E_\varepsilon y_\delta = 0$, *то из сходимости метода итераций* (1) *в энергетической норме следует его сходимость в обычной норме пространства* H. *И, следовательно, для оценки погрешности не потребуется предположения истокопредставимости точного решения* ($x = A^s z,\ s > 0$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матысик, О. В. Явные и неявные итерационные процедуры решения некорректно поставленных задач / О. В. Матысик. – Брест : Брест. гос. ун-т, 2014. – 213 с.