Оценки погрешностей в неявном процессе итераций решения некорректных уравнений I рода

Дорогокупец Павел Николаевич

УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина"

1. Сходимость метода при неточной правой части уравнения. Для решения в гильбертовом пространстве операторного уравнения I рода

$$Ax = y_\delta \tag{1}$$

с положительным ограниченным самосопряженным оператором A (0 не является его собственным значением, но $0 \in SpA$, и, следовательно, рассматриваемая задача некорректна) используем итерационный процесс неявного типа

$$\left(E + \alpha^2 A^2\right) x_{n+1,\delta} = (E - \alpha A)^2 x_{n,\delta} + 2\alpha y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0. \tag{2}$$

Здесь E — тождественный оператор, $\|y - y_\delta\| \le \delta$.

<u>Теорема.</u> *Итерационный процесс* (2) *при условии* $\alpha > 0$ *сходится, если выбирать число итераций* n *в зависимости от уровня погрешности* δ *так, чтобы* $n\delta \to 0$ *при* $n \to \infty$, $\delta \to 0$. *Если решение* x *уравнения* (1) *истокообразно представимо, т. е.* $x = A^s z, s > 0$, *то при* $\alpha > 0$ *для метода* (2) *справедлива оценка*

$$\left\|x - x_{n,\delta}\right\| \le \max\left\{ s^s (2n\alpha e)^{-s}, \frac{M^s (1 - \alpha M)^{2n}}{\left(1 + \alpha^2 M^2\right)^n} \right\} \|z\| + 2n\alpha\delta.$$

<u>Замечание.</u> *Так как для достаточно больших* n $\dfrac{M^s (1 - \alpha M)^{2n}}{\left(1 + \alpha^2 M^2\right)^n} \le s^s (2n\alpha e)^{-s}$, *то для этих* n *справедлива оценка*

$$\left\|x - x_{n,\delta}\right\| \le s^s (2n\alpha e)^{-s} \|z\| + 2n\alpha\delta. \tag{3}$$

Оптимальная по n оценка для (3) имеет вид

$$\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_{\text{опт}} \le (1 + s) e^{-s/(s+1)} \delta^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} \tag{4}$$

и получается при $n_{\text{опт}} = s(2\alpha)^{-1} e^{-s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} \delta^{-1/(s+1)}$.

2. Сравнение предложенного метода с методом регуляризации. Метод регуляризации для операторного уравнения (1) эквивалентен решению уравнения $A^2 x_{\tau,\delta} + \tau x_{\tau,\delta} = Ay_\delta$.

Для истокообразного точного решения оценка погрешности этого метода имеет вид $\|x_{\tau,\delta}-x\| \le \delta\tau^{-\frac{1}{2}}+\tau^{\frac{s}{2}}\|z\|$ [1]. При $\tau_{\text{опт}}=s^{-\frac{2}{s+1}}\delta^{\frac{2}{s+1}}\|z\|^{-\frac{2}{s+1}}$ получаем оптимальную оценку

$$\|x_{\tau,\delta}-x\|_{\text{опт}} \le (1+s)s^{-\frac{s}{s+1}}\delta^{\frac{s}{s+1}}\|z\|^{\frac{1}{s+1}}. \qquad (5)$$

Для неявного метода (2) при больших n оптимальная оценка имеет вид (4) и получается при $\alpha_{\text{опт}}=2^{-1}s\, n_{\text{опт}}^{-1}\, e^{-\frac{s}{s+1}}\delta^{-\frac{1}{s+1}}\|z\|^{\frac{1}{s+1}}$. Сравнение $\|x_{\tau,\delta}-x\|_{\text{опт}}$ с $\|x-x_{n,\delta}\|_{\text{опт}}$ показывает, что при $s=1;2$ оценки отличаются только константами, причём при $s=1$ оценка (4) меньше оценки (5) в 1,65 раза, а при $s=2$ – в 1,2 раза.

Используя метод регуляризации, приходится обращать оператор $A^2+\tau_{\text{опт}}E$, а используя метод (2) – $\left(A^2+\dfrac{1}{\alpha_{\text{опт}}^2}E\right)\alpha_{\text{опт}}^2$. Очевидно, обращение тем легче, чем больше коэффициент при E. Расчеты показывают, что при $s=1$ величина $\dfrac{1}{\alpha_{\text{опт}}^2}$ больше $\tau_{\text{опт}}$ примерно в 11 раз, а при $s=2$ – примерно в 6 раз, следовательно, обратить оператор в методе (2) легче.

3. Погрешность в счете. Рассмотрим погрешность метода (2) при счете с округлениями. Пусть $x_{n,\delta}$ – точное значение, полученное по формуле (2), а z_n – приближенное решение, полученное по той же формуле с учетом вычислительных погрешностей γ_n, т. е.

$$z_{n+1}=\left(E+\alpha^2A^2\right)^{-1}\left[(E-\alpha A)^2 z_n+2\alpha y_\delta\right]+\alpha\gamma_n,\quad z_0=0. \qquad (6)$$

Обозначим $\varepsilon_n=z_n-x_{n,\delta}$ и вычтем из (6) равенство (2), получим

$$\varepsilon_{n+1}=\left(E+\alpha^2A^2\right)^{-1}(E-\alpha A)^2\varepsilon_n+\alpha\gamma_n.$$

Так как нулевые приближения равны нулю, то $\gamma_0=0$. По индукции нетрудно получить [2], что $\varepsilon_n=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(E+\alpha^2A^2\right)^{-(n-1-k)}(E-\alpha A)^{2(n-1-k)}\alpha\gamma_k$.

В силу $\alpha>0$ и принадлежности нуля спектру оператора A имеем $\left\|\left(E+\alpha^2A^2\right)^{-1}(E-\alpha A)^2\right\|\le 1$, поэтому $\|\varepsilon_n\|\le n\alpha\gamma$, где $\gamma=\sup\limits_k|\gamma_k|$.

Таким образом, для достаточно больших n

$$\|x-z_n\|\le\|x-x_{n,\delta}\|+\|x_{n,\delta}-z_n\|\le s^s(2n\alpha e)^{-s}\|z\|+2n\alpha\delta+n\alpha\gamma.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Морозов, В. А. О выборе параметра при решении функциональных уравнений методом регуляризации / В. А. Морозов // Доклады АН СССР. – 1967. – Т. 176, № 6. – С. 1225–1228.

2. Матысик, О. В. Явные и неявные итерационные процедуры решения некорректно поставленных задач / О. В. Матысик. – Брест : Брест. гос. ун-т, 2014. – 213 с.