Интерполирование скалярных функций обобщенными многочленами

Дорошук Яна Валерьевна

УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина"

Отличием обобщённого интерполирования Эрмита – Биркгофа от общепринятого является требование совпадения в узлах не производных интерполируемой функции и интерполяционного многочлена, а некоторых дифференциальных или другого вида операторов. Такого типа формулы построены и исследованы [1] для тригонометрических, двух видов рациональных и экспоненциальных функций. Эти формулы обобщены на случай функций матричного аргумента [2]. В данной работе рассмотрена одна из интерполяционных задач Эрмита–Биркгофа типа для чебышевских систем общего вида и дается ее решение. Приводятся некоторые частные случаи.

Пусть задана некоторая чебышевская система функций $\varphi_k(x) \in C^{n+1}(T)$ $(k = 0,1,\ldots,n+1),$ $x \in T \subseteq \mathrm{R},$ где $C^{n+1}(T)$ – пространство непрерывно дифференцируемых $n+1$ раз на отрезке T функций. Введем также функции $g_n(\cdot;\cdot),$ заданные посредством определителей

$$g_n(\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_n;\, x_0,x_1,\ldots,x_n) = \begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_0(x_1) & \ldots & \varphi_0(x_n) \\ \varphi_1(x_0) & \varphi_1(x_1) & \ldots & \varphi_1(x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_n(x_0) & \varphi_n(x_1) & \ldots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix}, \tag{1}$$

где $x_k \in T$ $(k = 0,1,\ldots,n).$

Очевидно, что при перестановке любых двух аргументов-точек x_i и x_j $(i \neq j)$ или аргументов-функций φ_l и φ_m $(l \neq m)$ местами функция (1) меняет знак на противоположный, а если хотя бы два числовых аргумента и (или) аргумента-функции одинаковы, то $g_n(\cdot;\cdot) = 0.$ Это следует из свойств определителя.

Введём обозначение $\tilde{g}_n = g_n(\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_n;\, x_0,x_1,\ldots,x_n)$ и многочлен

$$L_n(x) = \frac{(-1)^n}{\tilde{g}_n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k g_n(\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_n;\, x_0,x_1,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_n,x)\, f(x_k), \tag{2}$$

удовлетворяющий интерполяционным условиям

$$L_n(x_i) = f(x_i) \quad (i = 0,1,\ldots,n), \tag{3}$$

существует [3] и он единственен.

Пусть $f(x) \in C^{n+1}(T).$ Рассмотрим дифференциальный оператор

$$D_{n+1} f(x) = W_n^{-1}(\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_n;\, x) W_{n+1}(\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_n, f;\, x), \tag{4}$$

где $W_n(\cdot;x)$ и $W_{n+1}(\cdot;x)$ – вронскианы для указанных в качестве аргументов систем функций. Очевидно, что функции $\varphi_k(x)$ являются решениями дифференциального уравнения $D_{n+1}f(x)=0,$ т.е.

$$D_{n+1}\varphi_k(x)=0, \quad k=0,1,\ldots,n. \tag{5}$$

Эквивалентное [3] определение оператора (4) имеет вид

$$D_{n+1}f(x)=\left(D-b_n(x)\right)\left(D-b_{n-1}(x)\right)\cdots\left(D-b_0(x)\right)f(x)=\left(D-b_n(x)\right)D_nf(x),\ D=\frac{d}{dx}, \tag{6}$$

где $b_0(x)=\dfrac{\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)},\ b_k(x)=\dfrac{\left(D_k\varphi_k(x)\right)'}{D_k\varphi_k(x)}$ $(k=1,2,\ldots,n).$

Методом математической индукции при $k=0,1,\ldots,n$ можно показать, что здесь $b_k(x)\in C^{n-k}(T)$ и $D_{k+1}f(x)\in C^{n-k}(T).$

Теорема. *Интерполяционный многочлен*

$$\tilde{L}_{n+1}(x)=L_n(x)+\frac{\Omega_{n+1}(x)D_{n+1}(f;x_j)}{D_{n+1}(\varphi_{n+1};x_j)}, \tag{7}$$

где $L_n(x)$ *определяется формулой* (2),

$$\Omega_{n+1}(x)=\frac{1}{\tilde{g}_n}g_{n+1}(\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n+1};\ x_0,x_1,\ldots,x_n,x), \quad D_{n+1}(\varphi_{n+1};x_j)\neq 0,$$

удовлетворяет интерполяционным условиям

$$\tilde{L}_{n+1}(x_i)=f(x_i)\ \ (i=0,1,\ldots,n); \quad D_{n+1}(\tilde{L}_{n+1};x_j)=D_{n+1}(f;x_j) \tag{8}$$

и инвариантен относительно многочленов вида

$$P_{n+1}(x)=c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+\ldots+c_{n+1}\varphi_{n+1}(x), \tag{9}$$

где $c_0,c_1,\ldots,c_{n+1}$ *– произвольные действительные числа.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Худяков, А.П. Интерполяционные многочлены типа Эрмита–Биркгофа относительно отдельных чебышевских систем функций / А.П. Худяков // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2010. – № 4. – С. 29–36.
2. Yanovich, L.A. On one class of interpolating formulas for functions of matrix variables / L.A. Yanovich, A.P. Hudyakov // J. Numer. Appl. Math. – 2011. – № 2 (105). – P. 136–147.
3. Хаусхолдер, А.С. Основы численного анализа / А.С. Хаусхолдер ; под ред. Л.А. Люстерника. – М. : Изд-во иностр. лит., 1956. – 320 с.