Приближенное решение операторных уравнений при помощи метода итераций с попеременно-чередующимся шагом

Гаркович Дмитрий Сергеевич

УО «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»

Как известно, погрешность метода простой итерации с постоянным шагом

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha\left(y_\delta - Ax_{n,\delta}\right),\ x_{0,\delta} = 0 \tag{1}$$

зависит от суммы итерационных шагов, и притом так, что для сокращения числа итераций желательно, чтобы шаги были как можно большими. Однако на эти шаги накладываются ограничения сверху $0 < \alpha \le \dfrac{5}{4\|A\|}$.

Возникла идея попытаться ослабить эти ограничения. Это удалось сделать, выбирая для шага два значения α и β попеременно, где β не должно удовлетворять прежним требованиям.

1. Постановка задачи. В гильбертовом пространстве H решается уравнение I рода

$$Ax = y, \tag{2}$$

где A – ограниченный положительный самосопряженный оператор, для которого нуль не является собственным значением, но принадлежит спектру оператора A. Предлагаем, что при точной правой части y уравнение (2) имеет единственное решение x^*. Для его отыскания используем итерационный метод

$$\begin{gathered} x_{n+1} = x_n - \alpha_{n+1}\left(Ax_n - y\right),\ x_0 = 0 \\ \alpha_{2n+1} = \alpha,\ \alpha_{2n+2} = \beta,\ n = 0,1,2,\ldots \end{gathered} \tag{3}$$

В случае приближенной правой части $y_\delta : \|y - y_\delta\| \le \delta$ метод (3) примет вид

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} - \alpha_{n+1}\left(Ax_{n,\delta} - y_\delta\right),\quad x_{0,\delta} = 0$$

$$\alpha_{2n+1} = \alpha,\quad n = 0,1,2,\ldots,\ \alpha_{2n+2} = \beta,\quad n = 0,1,2,\ldots\ . \tag{4}$$

Далее будем считать, что $\|A\| = 1$.

2. Априорный выбор числа итераций при приближенной правой части. Показано, что методы (3), (4) сходятся в исходной норме гильбертова пространства. Для их сходимости требуется, чтобы при $0 < \alpha < 2,\ \beta > 0$ было

$$\left|(1 - \alpha\lambda)(1 - \beta\lambda)\right| < 1 \tag{5}$$

для любого $\lambda \in (0,1]$.Условие (5) равносильно совокупности двух условий

$$\left(\lambda + \beta\right)^2 < 8\lambda\beta, \tag{6}$$

$$\lambda\beta < \lambda + \beta. \tag{7}$$

Для метода (4) изучен априорный выбор числа итераций. Показано, что итерационный процесс (4) сходится при условиях (6), (7) и $0 < \alpha < 2$, если число итераций n выбирать в зависимости от δ так, что $n\delta \to 0,\ n \to \infty,\ \delta \to 0$. В предположении, что точное решение x^* истокопредставимо, т.е. $x^* = A^s z,\ s > 0$, для метода (4) получена следующая оценка погрешности

$$\left\|x^* - x_{n,\delta}\right\| \le s^s\left[n(\alpha+\beta)\right]^{-s}\left\|z\right\| + \frac{n}{2}(\alpha+\beta)\delta. \tag{8}$$

Ее оптимальная оценка по n имеет вид $\left\|x^* - x_{n,\delta}\right\|_{опт} \le (1+s)2^{-\frac{s}{s+1}}\delta^{\frac{s}{s+1}}\left\|z\right\|^{\frac{1}{s+1}}$ и получается при $n_{опт} = s\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^{-1}2^{-\frac{s}{s+1}}\delta^{-\frac{1}{s+1}}\left\|z\right\|^{\frac{1}{s+1}}$. В методе (1) $0 < \alpha \le \frac{5}{4\left\|A\right\|}$, в методе (4) $0 < \frac{\alpha+\beta}{2} < 4$. Следовательно, выбирая α и β попеременно соответствующим образом, можно сделать $n_{опт}$ в методе (4) примерно втрое меньше, чем в методе (1). Таким образом, используя метод (4), для достижения оптимальной точности достаточно сделать число итераций в 3 раза меньше, чем, используя метод (1). Рекомендуемые значения $\alpha = 1{,}17$ и $\beta = 6{,}5$.

Показано, что в случае неединственного решения ($\lambda = 0$ является собственным значением оператора A) метод (3) сходится к решению с минимальной прямой.

3. Правило останова по невязке. Метод (4) можно сделать эффективным и тогда, когда нет сведений об истокопредствимости точного решения, если воспользоваться правилом останова по невязке. Зададим уровень останова $\varepsilon > 0$ и момент останова m определим условиями

$$\left\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\right\| > \varepsilon, (n < m), \left\|Ax_{m,\delta} - y_\delta\right\| \le \varepsilon, \varepsilon = b\delta, b > 1. \tag{9}$$

Доказана теорема.

<u>Теорема.</u> *Пусть* $A = A^* > 0, \left\|A\right\| \le M$ *и момент останова* $m = m(\delta)$ *(*m *- четное) в методе* (4) *выбирается по правилу* (9). *Тогда* $x_{m,\delta} \to x^*, \delta > 0$. *Если, кроме того,* $x^* = A^s z, s \ge 0$, *то справедливы оценки*

$$m \le 2 + \frac{s+1}{\alpha+\beta}\left[\frac{\left\|z\right\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{1}{s+1}},$$

$$\left\|x_{m,\delta} - x^*\right\| \le \left[(b+1)\delta\right]^{s/(s+1)}\left\|z\right\|^{1/(s+1)} + \frac{\alpha+\beta}{2}\left\{2 + \frac{s+1}{\alpha+\beta}\left[\frac{\left\|z\right\|}{(b-1)\delta}\right]^{1/(s+1)}\right\}\delta.$$