Алгебраическое интерполирование Эрмита – Биркгофа с одним специальным узлом

Худяков Андрей Павлови, Трофимук Александр Александров

УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина"

В работе [1] по общей чебышевской системе функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n+1}(x)$, $x \in T \subset \mathbb{R}$, построен обобщенный интерполяционный многочлен Эрмита –Биркгофа вида

$$\tilde{L}_{n+1}(x) = L_n(x) + \frac{\Omega_{n+1}(x) D_{n+1}(f; x_{n+1})}{D_{n+1}(\varphi_{n+1}; x_{n+1})}, \tag{1}$$

где $L_n(x)$ – многочлен Лагранжа по рассматриваемой системе функций $\{\varphi_k(x)\}$, $\Omega_{n+1}(x)$ – многочлен степени $n+1$ по той же системе, со старшим коэффициентом, равным 1, удовлетворяющий интерполяционным условиям вида $\Omega_{n+1}(x_k) = 0$ $(k = 0,1,\ldots,n)$, а $D_{n+1} f(x)$ является линейным дифференциальным оператором порядка $n+1$, аннулирующим первые базисные функции чебышевской системы. Многочлен (1) удовлетворяет интерполяционным условиям

$$\tilde{L}_{n+1}(x_i) = f(x_i) \ \ (i = 0,1,\ldots,n); \quad D_{n+1}(\tilde{L}_{n+1}; x_{n+1}) = D_{n+1}(f; x_{n+1})$$

и является точным для многочленов вида

$$P_{n+1}(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_{n+1}\varphi_{n+1}(x),$$

где $c_0, c_1, \ldots, c_{n+1}$ – произвольные числа. Интерполяционный узел x_{n+1} может совпадать с одним из узлов $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Очевидно, порядок оператора $D_{n+1} f(x)$ здесь зависит от числа узлов.

В алгебраическом случае многочлен $L_n(x)$ совпадает с алгебраическим интерполяционным многочленом Лагранжа, $\Omega_{n+1}(x) = \omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$, а дифференциальный оператор $D_{n+1} f(x) \equiv f^{(n+1)}(x)$. Так как $D_{n+1}(\varphi_{n+1}; x_{n+1}) = (n+1)!$ при $\varphi_{n+1}(x) = x^{n+1}$, то алгебраический многочлен $\tilde{L}_{n+1}(x)$, удовлетворяющий условиям

$$\tilde{L}_{n+1}(x_k) = f(x_k) \ \ (k = 0,1,\ldots,n); \ \ \tilde{L}_{n+1}^{(n+1)}(x_{n+1}) = f^{(n+1)}(x_{n+1}),$$

имеет вид

$$\tilde{L}_{n+1}(f; x) = L_n(f; x) + \frac{\omega_n(x) f^{(n+1)}(x_{n+1})}{(n+1)!} \tag{2}$$

и является точным для алгебраических многочленов степени не выше $n+1$.

Получим представление и оценку погрешности для формулы (2). Будем предполагать, что функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема $n+2$ раз на промежутке $T = (a,b)$.

Теорема 1. *Представление погрешности интерполяционной формулы* (2) *имеет вид*

$$f(x)-\tilde{L}_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+2)}(\xi)(\eta-x_{n+1})}{(n+1)!}\omega_n(x),$$

где $\xi,\ \eta\in T$.

Обозначим $M_n=\max\limits_{\theta\in T}\left|f^{(n+2)}(\theta)\right|$, $C_n=\left|\omega_n(x)\right|$. Так как $\left|\eta-x_{n+1}\right|\le b-a$, то для формулы (2) имеет место оценка погрешности

$$\left|f(x)-\tilde{L}_{n+1}(x)\right|\le\frac{(b-a)M_nC_n}{(n+1)!}.$$

Приведем далее аналогичную алгебраическую интерполяционную формулу, в которую входит значение производной порядка m, не зависящего от количества узлов. Введем обозначения $\omega_{n,k}(x)=(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)$, $a_k=\omega_{n,k}^{(m)}(x_{n+1})$, $\tilde{x}_k=a_kx_{n+1}+m\omega_{n,k}^{(m-1)}(x_{n+1})$ $(k=0,1,\ldots,n)$. Будем предполагать, что $\omega_n^{(m)}(x_{n+1})\ne 0$.

Теорема 2. *Пусть* $1\le m\le n$. *Алгебраический многочлен степени* $n+1$

$$\tilde{L}_{n+1}(f;x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\omega_{n,k}(x)(a_kx-\tilde{x}_k)}{\omega_{n,k}(x_k)(a_kx_k-\tilde{x}_k)}f(x_k)+\frac{\omega_n(x)}{\omega_n^{(m)}(x_{n+1})}f^{(m)}(x_{n+1}) \tag{3}$$

удовлетворяет интерполяционным условиям

$$\tilde{L}_{n+1}(x_k)=f(x_k)\ \ (k=0,1,\ldots,n);\ \ \tilde{L}_{n+1}^{(m)}(x_{n+1})=f^{(m)}(x_{n+1}), \tag{4}$$

и является точным для алгебраических многочленов степени не выше $n+1$.

Получим представление погрешности для формулы (3). Будем предполагать, что $f\in C_T^{n+1}$. Введем обозначение $\alpha=\dfrac{(n+1)!}{\omega_n^{(m)}(x_{n+1})}\left[\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{a_kf(x_k)}{\omega_{n,k}(x_k)}-f^{(m)}(x_{n+1})\right]$.

Теорема 3. *Погрешность интерполяционного многочлена* (3) *задается равенством*

$$f(x)-\tilde{L}_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)+\alpha}{(n+1)!}\omega_n(x),$$

где $\xi\in T$.

Введем обозначения $M_n=\max\limits_{\theta\in T}\left|f^{(n+1)}(\theta)+\alpha\right|$, $C_n=\left|\omega_n(x)\right|$. Для интерполяционной формулы (3) справедлива оценка погрешности

$$\left|f(x)-\tilde{L}_{n+1}(x)\right|\le\frac{M_nC_n}{(n+1)!}.$$

Замечание. Задача построения алгебраического интерполяционного многочлена, удовлетворяющего интерполяционным условиям вида (4) не всегда однозначно разрешима. Например, в случае узлов $x_0=1$, $x_1=3$, $x_2=2$ и функции, такой что $f(x_0)=3$, $f(x_1)=13$, $f'(x_2)=5$, существует как минимум два алгебраических многочлена, удовлетворяющих условиям $P(x_k)=f(x_k)$ $(k=0,1)$; $P'(x_2)=f'(x_2)$. Первый из них – $P_1(x)=x^2+x+1$, второй – $P_2(x)=2x^2-3x+4$. Интерполяционный многочлен (3) в данном случае не существует, так как $\omega_1'(x_2)=0$.

Алгебраические интерполяционные формулы Эрмита – Биркгофа для функций скалярного аргумента и операторов построены и исследованы также в работах [2, 3].

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф16М-055).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Худяков, А.П. Обобщённые интерполяционные формулы Эрмита –Биркгофа для случая чебышевских систем функций / А.П. Худяков, Л.А. Янович // Весці НАН Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2015. – № 2. – С. 5–14.
2. Турецкий, А.Х. Теория интерполирования в задачах / А.Х. Турецкий. – Минск : Вышэйшая школа, 1968. – 320 с.
3. Makarov, V.L. Methods of Operator Interpolation / V.L. Makarov, V.V. Khlobystov, L.A. Yanovich. – Київ : Ін-т математики Нац. акад. наук України, 2010. – Т. 83. – 517 с.