Тригонометрический аналог формулы Лагранжа – Сильвестра для случая простых собственных значений

Кульгун Екатерина Ивановна

УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина"

Известна и широко используется в матричном исчислении [1] формула Лагранжа–Сильвестра, позволяющая аналитическую функцию от матриц $f(A)$ представить в виде алгебраического полинома от матрицы A. В случае, когда характеристические числа $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы A различны, эта формула имеет вид

$$f(A)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(A-\lambda_0 I)\cdots(A-\lambda_{k-1}I)(A-\lambda_{k+1}I)\cdots(A-\lambda_n I)}{(\lambda_k-\lambda_0)\cdots(\lambda_k-\lambda_{k-1})(\lambda_k-\lambda_{k+1})\cdots(\lambda_k-\lambda_n)}f(\lambda_k),$$

I – единичная матрица.

Построим тригонометрический аналог данной формулы для 2π-периодических целых функций. Рассмотрим случай стационарных матриц.

Теорема. *Для целой 2π-периодической функции $F(z)$ и матрицы A с различными собственными значениями $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$, для которых $\cos\lambda_k \neq \cos\lambda_\nu$ при $k \neq \nu$, имеет место равенство*

$$F(A)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(\cos A-\cos\lambda_0 I)\cdots(\cos A-\cos\lambda_{k-1}I)(\cos A-\cos\lambda_{k+1}I)\cdots}{(\cos\lambda_k-\cos\lambda_0)\cdots(\cos\lambda_k-\cos\lambda_{k-1})(\cos\lambda_k-\cos\lambda_{k+1})\cdots}\times$$

$$\times\frac{\cdots(\cos A-\cos\lambda_n I)}{\cdots(\cos\lambda_k-\cos\lambda_n)}\left(\frac{F(\lambda_k)+F(-\lambda_k)}{2}I+\frac{F(\lambda_k)-F(-\lambda_k)}{2\sin\lambda_k}\sin A\right), \qquad (1)$$

где I – единичная матрица.

Таким образом, для любой 2π-периодической целой функции $F(z)$ матрица $F(A)$ совпадает с тригонометрическим матричным многочленом $T_{n+1}(A)$ степени $n+1$, который имеет вид

$$T_{n+1}(A)=\tilde{a}_0 I+\sum_{k=1}^{n}(\tilde{a}_k\cos kA+\tilde{b}_k\sin kA)+\tilde{b}_{n+1}\sin(n+1)A.$$

Формула (1) является одним из тригонометрических аналогов классической интерполяционной формулы Лагранжа–Сильвестра.

Для случая матриц второго порядка, т.е. при $n=1$ формула (1) примет вид

$$F(A)=\frac{\cos A-\cos\lambda_1 I}{\cos\lambda_0-\cos\lambda_1}\left(\frac{F(\lambda_0)+F(-\lambda_0)}{2}I+\frac{F(\lambda_0)-F(-\lambda_0)}{2\sin\lambda_0}\sin A\right)+$$

$$+\frac{\cos A-\cos\lambda_0 I}{\cos\lambda_1-\cos\lambda_0}\left(\frac{F(\lambda_1)+F(-\lambda_1)}{2}I+\frac{F(\lambda_1)-F(-\lambda_1)}{2\sin\lambda_1}\sin A\right). \qquad (2)$$

Пример. Пусть задана матрица $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, λ_0, λ_1 $(\lambda_0 \neq \lambda_1)$ – ее собственные значения. Вычислим матрицы $F(A)=e^{\cos A}$ и $F(A)=e^{\sin A}$.

По формуле (2) имеем для $F(A)=e^{\cos A}$

$$e^{\cos A}=\frac{e^{\cos\lambda_0}-e^{\cos\lambda_1}}{\cos\lambda_0-\cos\lambda_1}\cos A+\frac{e^{\cos\lambda_1}\cos\lambda_0-e^{\cos\lambda_0}\cos\lambda_1}{\cos\lambda_0-\cos\lambda_1}I. \tag{3}$$

Аналогично для функции $F(A)=e^{\sin A}$ получим

$$e^{\sin A}=\left(\frac{e^{\sin\lambda_0}-e^{-\sin\lambda_0}}{4\sin\lambda_0(\cos\lambda_0-\cos\lambda_1)}+\frac{e^{\sin\lambda_1}-e^{-\sin\lambda_1}}{4\sin\lambda_1(\cos\lambda_1-\cos\lambda_0)}\right)\sin 2A+$$
$$+\frac{e^{\sin\lambda_0}+e^{-\sin\lambda_0}-e^{\sin\lambda_1}-e^{-\sin\lambda_1}}{2(\cos\lambda_0-\cos\lambda_1)}\cos A-$$
$$-\left(\frac{\cos\lambda_1(e^{\sin\lambda_0}-e^{-\sin\lambda_0})}{2\sin\lambda_0(\cos\lambda_0-\cos\lambda_1)}+\frac{\cos\lambda_0(e^{\sin\lambda_1}-e^{-\sin\lambda_1})}{2\sin\lambda_1(\cos\lambda_1-\cos\lambda_0)}\right)\sin A+$$
$$+\frac{\cos\lambda_0(e^{\sin\lambda_1}+e^{-\sin\lambda_1})-\cos\lambda_1(e^{\sin\lambda_0}+e^{-\sin\lambda_0})}{2(\cos\lambda_0-\cos\lambda_1)}I. \tag{4}$$

В частности, для матрицы $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ имеем $\lambda_0=0$, $\lambda_1=1$. По формуле (3) для функции $F(A)=e^{\cos A}$ получим

$$e^{\cos A}=\frac{e-e^{\cos 1}}{1-\cos 1}\cos A+\frac{e^{\cos 1}-e\cos 1}{1-\cos 1}I. \tag{5}$$

Используя непосредственное разложение функций $\cos z$ и $\sin z$ в ряд, можно показать, что для данной матрицы

$$\cos A=I-(1-\cos 1)A, \quad \sin A=A\sin 1. \tag{6}$$

Подставив формулу (6) для $\cos A$ в (5), получим

$$e^{\cos A}=e\cdot I+(e^{\cos 1}-e)A.$$

Аналогично, используя равенства (4) и (6), а также соотношение

$$\frac{e^{\sin\lambda_0}-e^{-\sin\lambda_0}}{\sin\lambda_0}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{e^{\sin\lambda}-e^{-\sin\lambda}}{\sin\lambda}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{\cos\lambda\left(e^{\sin\lambda}+e^{-\sin\lambda}\right)}{\cos\lambda}=2,$$

для функции $F(A)=e^{\sin A}$ будем иметь

$$e^{\sin A}=\frac{2\sin 1-e^{\sin 1}+e^{-\sin 1}}{4\sin 1(1-\cos 1)}\sin 2A+\frac{2-e^{\sin 1}-e^{-\sin 1}}{2(1-\cos 1)}\cos A-$$

$$-\frac{\sin 2 - e^{\sin 1} + e^{-\sin 1}}{2\sin 1(1-\cos 1)}\sin A + \frac{e^{\sin 1} + e^{-\sin 1} - 2\cos 1}{2(1-\cos 1)} I =$$

$$= \left(\frac{e^{\sin 1} - e^{-\sin 1}}{2} - \sin 1\right) A^2 + \left(\sin 1 - 1 + \frac{e^{\sin 1} + e^{-\sin 1}}{2}\right) A + I.$$

Так как $A^2 = A,$ то окончательно в этом случае придем к равенству

$$e^{\sin A} = \left(e^{\sin 1} - 1\right) A + I.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – 3-е изд. – М. : Наука, 1967. – 575 с.