**Неявный итерационный метод
решения некорректных задач с приближенным оператором**

Мархель Максим Александрович

УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина"

Для решения линейного операторного уравнения первого рода

$$Ax = y_\delta \,, \tag{1}$$

в гильбертовом пространстве H с положительным самосопряженным ограниченным оператором A предлагается неявный итерационный метод

$$(E+\alpha A)x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha y_\delta\,, \quad x_{0,\delta} = 0. \tag{2}$$

Здесь $\alpha > 0$, $\|y - y_\delta\| \le \delta$ и $0 \in SpA$, но нуль не является его собственным значением. Поэтому задача отыскания решения уравнения является некорректной. Предполагается существование единственного решения x при точной правой части y уравнения (1).

Рассмотрим случай, когда счет ведется по итерационному методу (2) не с оператором A, а с оператором A_h, $\|A - A_h\| \le h.$ Введём погрешность $\eta_n = u_n - x_n$, где

$$(E+\alpha A_h)u_{n+1} = u_n + \alpha y, \quad u_0 = 0. \tag{3}$$

Имеем $(E+\alpha A_h)u_{n+1} - (E+\alpha A_h)x_{n+1} = u_n + \alpha y - (E+\alpha A_h)x_{n+1}$. Тогда

$$(E+\alpha A_h)\eta_{n+1} = u_n + \alpha y - (E+\alpha A_h)x_{n+1};$$
$$(E+\alpha A_h)\eta_{n+1} = (u_n - x_n) + (x_n + \alpha y) - (E+\alpha A_h)x_{n+1}.$$

Из (3) следует

$$(E+\alpha A_h)\eta_{n+1} = \eta_n + (E+\alpha A)x_{n+1} - x_{n+1} - \alpha A_h x_{n+1};$$
$$(E+\alpha A_h)\eta_{n+1} = \eta_n + \alpha(A - A_h)x_{n+1}.$$

Отсюда $(E+\alpha A_h)\eta_{n+1} = \eta_n + \alpha B x_{n+1}$, где $B = A - A_h$, $\|B\| \le h$, $\eta_0 = 0$.

Нетрудно показать, что $\eta_n = \sum_{k=0}^{n-1} (E+\alpha A_h)^{-(k+1)} \alpha B x_{n-k}$.

Так как [1] $\|x_n\| = \left\|A^{-1}\left[E - (E+\alpha A)^{-n}\right]y\right\| \le n\alpha\|y\|$, то $\|x_{n-k}\| \le (n-k)\alpha\|y\|$.

Для оценки $\left\|(E+\alpha A_h)^{-(k+1)}\right\|$ потребуем, чтобы пространство H было сепарабельным и оператор A_h сокоммутировал с A, тогда [2, с. 388] он является функцией оператора A, т. е. $A_h = \int_0^M \phi(\lambda)\,dE_\lambda$ и спектральная функция у этих операторов одна и та же. Следовательно, $\|A - A_h\| = \max\limits_{[0,M]} |\lambda - \varphi(\lambda)| \le h$, так что

$$\left\|(E+\alpha A_h)^{-(k+1)}\right\| = \max_{[0,M]}\frac{1}{\left|1+\alpha\varphi(\lambda)\right|^{k+1}} \le \max_{[0,M]}\frac{1}{\left|1+\alpha(\lambda-h)\right|^{k+1}} \le \frac{1}{\left|1-\alpha h\right|^{k+1}}.$$

Таким образом, считая $\alpha h<1$, имеем $\|\eta_n\| \le \alpha^2 h\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n-k}{(1-\alpha h)^{k+1}}\|y\|$.

По индукции, нетрудно доказать, что

$$\alpha^2 h\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n-k}{(1-\alpha h)^{k+1}}\|y\| = h^{-1}\left[\frac{1}{(1-\alpha h)^n}-n\alpha h-1\right]\|y\|. \qquad (4)$$

При $n=1$ равенство (4) справедливо. Предположим, что оно верно при $n=p$, т. е. $\alpha^2 h\sum_{k=0}^{p-1}\frac{p-k}{(1-\alpha h)^{k+1}}\|y\| = h^{-1}\left[\frac{1}{(1-\alpha h)^p}-p\alpha h-1\right]\|y\|$ и рассмотрим при $n=p+1$. Имеем

$$\alpha^2 h\sum_{k=0}^{p}\frac{p+1-k}{(1-\alpha h)^{k+1}}\|y\| = \alpha^2 h\left[\frac{p+1}{1-ah}+\frac{p}{(1-\alpha h)^2}+\frac{p-1}{(1-\alpha h)^3}+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{(1-\alpha h)^p}+\frac{1}{(1-\alpha h)^{p+1}}\right]\|y\| = \alpha^2 h\left[\frac{p+1}{1-\alpha h}+\frac{1}{1-\alpha h}\left(\frac{p}{1-\alpha h}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{p-1}{(1-\alpha h)^2}+\ldots+\frac{1}{(1-\alpha h)^p}\right)\right]\|y\| = \alpha^2 h\left[\frac{p+1}{1-\alpha h}+\frac{1}{1-\alpha h}\sum_{k=0}^{p-1}\frac{p-k}{(1-\alpha h)^{k+1}}\right]\|y\| =$$

$$=\left[\frac{\alpha^2 h(p+1)}{1-\alpha h}+\frac{\alpha^2 h}{1-\alpha h}\sum_{k=0}^{p-1}\frac{p-k}{(1-\alpha h)^{k+1}}\right]\|y\| = \left[\frac{\alpha^2 h(p+1)}{1-\alpha h}+\frac{1}{h(1-\alpha h)}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{1}{(1-\alpha h)^p}-p\alpha h-1\right)\right]\|y\| = \frac{h^{-1}}{1-\alpha h}\left[\alpha^2 h^2(p+1)+\frac{1}{(1-\alpha h)^p}-p\alpha h-1\right]\|y\| =$$

$$=h^{-1}\left[\frac{1}{(1-\alpha h)^{p+1}}+\frac{\alpha^2 h^2 p+\alpha^2 h^2-p\alpha h-1}{1-\alpha h}\right]\|y\| = h^{-1}\left[\frac{1}{(1-\alpha h)^{p+1}}+\right.$$

$$\left.+\frac{(\alpha h-1)(\alpha h(p+1)+1)}{1-\alpha h}\right]\|y\| = h^{-1}\left[\frac{1}{(1-\alpha h)^{p+1}}-(p+1)\alpha h-1\right]\|y\|.$$

Итак, формула (4) доказана.

Следовательно, $\|\eta_n\| \le h^{-1}\left[\frac{1}{(1-\alpha h)^n}-n\alpha h-1\right]\|y\|$.

Запишем теперь общую оценку погрешности метода (2) с учетом неточности в правой части уравнения (1) и погрешности в операторе

$$\|x-u_{n,\delta}\| \le \|x-x_n\|+\|x_n-x_{n,\delta}\|+\|x_{n,\delta}-u_{n,\delta}\| \le$$

$$\le s^s(2n\alpha)^{-s}\|z\|+n\alpha\delta+h^{-1}\left[\frac{1}{(1-\alpha h)^n}-n\alpha h-1\right]\|y_\delta\|.$$

Метод (2) может быть использован при решении прикладных некорректных задач, которые часто встречаются в медицине, акустике, геофизике и спектроскопии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матысик, О. В. Итерационная регуляризация некорректных задач / О. В. Матысик. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 188 с.
2. Люстерник, Л. А. Элементы функционального анализа / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. – М. : Наука, 1965. – 520 с.