Останов по невязке в явной итерационной процедуре решения некорректных задач

Мялик Анастасия Ивановна

УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина"

В действительном гильбертовом пространстве H решается линейное некорректное уравнение первого рода

$$Ax = y \tag{1}$$

с положительным ограниченным самосопряженным оператором A, для которого нуль не является собственным значением. Однако предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора A, поэтому задача (1) неустойчива и, следовательно, некорректна.

Для решения уравнения (1) предлагается явная итерационная процедура

$$x_{n+1} = (E - \alpha A)^2 x_n + 2\alpha y - \alpha^2 Ay, \; x_0 = 0. \tag{2}$$

Предполагая существование единственного точного решения x уравнения (1) при точной правой части y, ищем его приближение $x_{n,\delta}$ при приближенной правой части y_δ, $\|y - y_\delta\| \le \delta$. В этом случае приближения (2) примут вид

$$x_{n+1,\delta} = (E - \alpha A)^2 x_{n,\delta} + 2\alpha y_\delta - \alpha^2 Ay_\delta, \; x_{0,\delta} = 0. \tag{3}$$

Ниже, под сходимостью метода (3) понимается утверждение о том, что приближения (3) сколь угодно близко подходят к точному решению x уравнения (1) при подходящем выборе n и достаточно малых δ, т.е.

$$\lim_{\delta \to 0} \left(\inf_n \|x - x_{n,\delta}\| \right) = 0.$$

Для метода (3) при условии $0 < \alpha \le \dfrac{5}{4\|A\|}$ доказана сходимость при точной и приближенной правой части уравнения (1), и в предположении, что точное решение уравнения истокообразно представимо, т. е. $x = A^s z$, $s > 0$, получена априорная оценка погрешности [1]. Эта оценка погрешности оптимизирована и найден априорный момент останова. В случае, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения, метод (3) становится неэффективным, так как тогда невозможно получить оценку погрешности и найти априорный момент останова.

Тем не менее, этот метод можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по невязке, аналогичным [2–3]. Зададим уровень останова $\varepsilon > 0$ и определим момент m останова условиями

$$\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon, \; (n < m), \quad \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \le \varepsilon, \; \varepsilon = b\delta, \; b > 1. \tag{4}$$

Предполагается, что при начальном приближении $x_{0,\delta}$ невязка достаточно велика, больше уровня останова ε, т.е. $\|Ax_{0,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon.$ Ниже метод итерации (3) с правилом останова (4) является сходящимся, если $\lim\limits_{\delta\to 0}\left(\inf\limits_{m}\left\|x-x_{m,\delta}\right\|\right)=0$. Покажем, что правило останова по невязке (4) применимо к методу (3).

Рассмотрим семейство функций $g_n(\lambda)=\lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)^{2n}\right]$. Используя результаты [1], нетрудно показать, что для $g_n(\lambda)$ выполняются следующие условия:

$$\sup_{0\le\lambda\le M}\left|g_n(\lambda)\right|\le 2\alpha n,\ \ n>0,\ 0<\alpha<\frac{2}{M},(M=\|A\|),$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M}\left|1-\lambda g_n(\lambda)\right|\le 1,\ \ 0<\alpha<\frac{2}{M},$$

$$1-\lambda g_n(\lambda)\to 0,\ n\to\infty,\ \forall\lambda\in(0,M],\ 0<\alpha<\frac{2}{M},$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M}\lambda^s\left|1-\lambda g_n(\lambda)\right|\le\left(\frac{s}{2n\alpha e}\right)^s,\ n>0,\ \ 0<\alpha\le\frac{5}{4M},\ \ 0\le s<\infty.$$

Справедливы

Лемма 1. *Пусть* $A=A^*\ge 0,\ \|A\|\le M$. *Тогда для* $\forall w\in H$ *выполняется* $(E-Ag_n(A))w\to 0,\ n\to\infty$.

Лемма 2. *Пусть* $A=A^*\ge 0,\ \|A\|\le M$. *Тогда* $\forall v\in\overline{R(A)}$ *имеет место соотношение* $n^s\left\|A^s(E-Ag_n(A))v\right\|\to 0,\ n\to\infty,\ 0\le s<\infty$.

Лемма 3. *Пусть* $A=A^*\ge 0,\ \|A\|\le M$. *Если для некоторого* $n_k<\overline{n}=const$ *и* $v_0\in\overline{R(A)}$ *при* $k\to\infty$ *имеем* $\omega_k=A(E-Ag_{n_k}(A))v_0\to 0$, *то выполняется* $v_k=(E-Ag_{n_k}(A))v_0\to 0$.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $A=A^*\ge 0,\ \ \|A\|\le M$ *и пусть момент останова* $m=m(\delta)$ *в методе* (3) *выбирается по правилу* (4). *Тогда метод* (3) *сходится.*

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и пусть* $x=A^s z$, $s>0$. *Тогда справедливы оценки* $m(\delta)\le 1+\dfrac{s+1}{2\alpha e}\left[\dfrac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{1}{s+1}}$,

$$\left\|x_{m(\delta),\delta}-x\right\|\le\left[(b+1)\delta\right]^{\frac{s}{s+1}}\|z\|^{\frac{1}{s+1}}+2\alpha\left\{1+\frac{s+1}{2\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{1}{s+1}}\right\}\delta. \quad (5)$$

Доказательство лемм 1–3 и теорем 1–2 аналогично доказательству подобных из [2–3].

Замечание 1. *Порядок оценки* (5) *есть* $O\left(\delta^{\frac{s}{s+1}}\right)$ *и, как следует из* [3], *он оптимален в классе задач с истокопредставимыми решениями.*

Замечание 2. *Используемое в формулировке теоремы* 2 *предположение порядка* $s > 0$ *истокопредставимости точного решения не потребуется на практике, так как оно не содержится в правиле останова* (4). *И тем не менее, в теореме* 2 *утверждается, что будет автоматически выбрано количество итераций m, обеспечивающих оптимальный порядок погрешности. Но даже, если истоко-представимость точного решения отсутствует, останов по невязке* (4), *как показывает теорема* 1, *обеспечивает сходимость итерационного метода, т. е. его регуляризующие свойства.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матысик, О. В. Априорные оценки погрешностей в явном методе итераций решения некорректных операторных уравнений первого рода / О. В. Матысик, Л. П. Махнист, Т. И. Каримова, А. И. Мялик // Компьютерное моделирование и информационные технологии в науке и образовании: материалы универ. науч.-практ. конф., Брест, 20-21 ноября 2015 г. / Брест. гос. ун-т. – Режим доступа: http://www.brsu.by/div/kafedra-prikladnoj-matematiki-i-informatiki.

2. Матысик, О. В. Итерационная регуляризация некорректных задач / О. В. Матысик. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 188 с.

3. Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г. М. Вайникко, А. Ю. Веретенников. – М.: Наука, 1986. – 178 с.