Сходимость в гильбертовом пространстве двухшагового метода явного типа решения некорректных задач с априорным выбором числа итераций

Минзер Екатерина Ивановна

УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина"

В гильбертовом пространстве H решается операторное уравнение первого рода $Ax = y_\delta$, где A – ограниченный, положительный, самосопряжённый оператор, для которого нуль не является собственным значением. Пусть $0 \in SpA$, тогда рассматриваемая задача некорректна. Здесь $\|y - y_\delta\| \le \delta$. Предположим, что при точной правой части y существует единственное решение x операторного уравнения. Для его отыскания применим явный двухшаговый метод итераций

$$x_{n,\delta} = 2(E - \alpha A)x_{n-1,\delta} - (E - \alpha A)^2 x_{n-2,\delta} + \alpha^2 A y_\delta,\ x_{0,\delta} = x_{1,\delta} = 0. \tag{1}$$

Здесь E – тождественный оператор, α – итерационный параметр. Ниже, под сходимостью метода (1) понимается утверждение о том, что приближения (1) сколь угодно близко подходят к точному решению уравнения $Ax = y_\delta$ при подходящем выборе n и достаточно малых δ.

Справедливы

Теорема 1. *При условии* $0 < \alpha \le \frac{5}{4\|A\|}$ *процесс* (1) *сходится, если выбирать число итераций n в зависимости от* δ *так, чтобы* $n\delta \to 0,\ n \to \infty,\ \delta \to 0$.

Теорема 2. *Если точное решение x уравнения* $Ax = y_\delta$ *истокообразно представимо, т. е.* $x = A^s z,\ s > 0$, *то при условии* $0 < \alpha \le \frac{5}{4\|A\|}$ *для метода итераций* (1) *справедлива оценка погрешности*

$$\|x - x_{n,\delta}\| \le s^s (s+2)\left[(n-1)\alpha e\right]^{-s} \|z\| + (5/4)(n-1)\delta\alpha. \tag{2}$$

Оптимизируем по n полученную оценку (2). Рассмотрим функцию $\varphi(n) = s^s (s+2)\left[(n-1)\alpha e\right]^{-s}\|z\| + (5/4)(n-1)\delta\alpha$. Приравняв выражение $\varphi'(n) = -s^{s+1}(s+2) \times (\alpha e)^{-s}\|z\|(n-1)^{-s-1} + (5/4)\delta\alpha$ нулю, получим

$$n_{\text{опт}} = 1 + \left(\frac{5}{4}\delta\right)^{-1/(s+1)} e^{-s/(s+1)} s(s+2)^{1/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} \alpha^{-1}. \tag{3}$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в (2), получим

$$\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}} \le (5/4)^{s/(s+1)} \delta^{s/(s+1)} e^{-s/(s+1)} (s+1)(s+2)^{1/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)}. \tag{4}$$

Следовательно, доказана

Теорема 3. *Оптимальная оценка погрешности для метода* (1) *имеет вид* (4) *и достигается при* $n_{опт}$ *из* (3).

Замечание 1. *Оптимальная оценка погрешности* (4) *не зависит от* α, *но от* α *зависит* $n_{опт}$. *Поэтому для уменьшения* $n_{опт}$, *т. е. объёма вычислительной работы, следует брать* α *возможно большим из условия* $0 < \alpha \le \frac{5}{4\|A\|}$, *и чтобы* $n_{опт}$ *было целым.*

Замечание 2. *Полученная оценка погрешности* (4) *имеет оптимальный для класса задач с истокообразно представимыми решениями порядок* $O\left(\delta^{s/(s+1)}\right)$ [1–2].

Рассмотрим погрешность метода (1) при счёте с округлениями. Пусть $x_{n,\delta}$ – точное значение, полученное по формуле (1), а z_n – значение, полученное по той же формуле с учётом вычислительных погрешностей γ_n, т. е.

$$z_n = 2(E-\alpha A)z_{n-1} - (E-\alpha A)^2 z_{n-2} + \alpha^2 A y_\delta + \alpha\gamma_n, \ z_0 = z_1 = 0. \quad (5)$$

Обозначим $\varepsilon_n = z_n - x_{n,\delta}$ и вычтем из (5) равенство (1), получим $\varepsilon_{n+1} = 2(E-\alpha A)\varepsilon_n - (E-\alpha A)^2\varepsilon_{n-1} + \alpha\gamma_{n+1}$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = 0$, $\gamma_0 = \gamma_1 = 0$. Так как нулевые приближения равны нулю, то $\gamma_0 = 0$. По индукции нетрудно показать, что:

$$\varepsilon_n = \sum_{i=2}^{n}(n-i+1)(E-\alpha A)^{n-i}\alpha\gamma_i.$$

В силу $0 < \alpha \le \frac{5}{4\|A\|}$ и принадлежности нуля спектру оператора A: $\|E-\alpha A\| \le 1$, поэтому $\|\varepsilon_n\| \le \left(1+2+3+...+(n-1)\right)\alpha\gamma = \frac{n(n-1)}{2}\alpha\gamma$, где $\gamma = \sup\limits_p |\gamma_p|$. Так как $\|x - z_n\| \le \|x - x_{n,\delta}\| + \|x_{n,\delta} - z_n\|$, то с учетом вычислительной погрешности справедлива следующая оценка погрешности итерационного метода (1)

$$\|x - z_n\| \le s^s(s+2)\left[(n-1)\alpha e\right]^{-s}\|z\| + \frac{5}{4}(n-1)\alpha\delta + \frac{n(n-1)}{2}\alpha\gamma.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матысик, О. В. Итерационная регуляризация некорректных задач / О. В. Матысик. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 188 с.

2. Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г. М. Вайникко, А. Ю. Веретенников. – М.: Наука, 1986. – 178 с.