ПРИМЕНЕНИЕ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ В ФОРМУЛЕ ТИПА ТЕЙЛОРА

Ничипорук Рита Фёдоровна

УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина"

Появился большой круг задач, в котором возникает проблема исследования функций непрерывных, но нигде не дифференцируемых. Примерами таких функций являются функции Гёльдера.

Пусть Ω — конечный отрезок. Говорят, что функция *f(x)*, заданная на Ω, удовлетворяет на Ω условию Гельдера (порядка β), если

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq A|x_1 - x_2|^\beta$$

для всех $x_1, x_2 \in \Omega$, где A — постоянная, а β— показатель Гельдера. Очевидно, функция *f(x)*, удовлетворяющая условию Гельдера, непрерывна па Ω.

Интерес к функциям Гёльдера связан с тем что функции, имеющие в каждой точке порядок Гёльдеровости $\beta < 1$, являются фракталами. Примером таких функций служит функция Вейерштрасса.

$$W(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)k} \sin(\lambda^k t), \lambda > 1, 1 < s < 2$$

Известно что эта функция имеет порядок Гёльдеровости 2 – *s*

Франко-американский математик Бенуа Мандельброт предложил следующие определение фрактала [2].

Фрактал (англ. *fractional* – дробный) — это множество, размерность Хаусдорфа которого строго больше его топологической размерности.

Фракталом называется структура, состоящая из частей которые в каком-то смысле подобны целому.

Можно выделить некоторые свойства фрактального множества *F*:

1) *F* имеет тонкую структуру, то есть содержит произвольно малые масштабы;
2) *F* слишком нерегулярное, чтобы быть описанным на традиционном геометрическом языке;
3) *F* имеет некоторую форму самоподобия, допуская приближённую или статическую;
4) В большинстве интересных случаев *F* определяется очень просто, например, рекурсивно.

В настоящей работе применяются формулы типа Тейлора для аппроксимации функции Вейерштрасса. Основным инструментом для получения формул типа Тейлора является локализованная дробная производная, зависящая от двух параметров α, ε [3].

$$(D^{\alpha,-\varepsilon}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\{\alpha\})}\left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1}\int_{x-\varepsilon}^{x}\frac{\varphi(t)}{(x-t)^{\{\alpha\}}}dt = \left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]}\left(D^{\{\alpha\},-\varepsilon}\varphi\right)(x)$$

$$0 < \alpha, -\infty < a \leq x \leq b < \infty$$

- правосторонняя локализованная дробная производная;
для $1<\alpha$ усечённую дробную производную типа Маршо введем следующим образом:

$$\left(D_{\delta}^{\alpha,-\varepsilon}\varphi\right)(x) = \frac{\varphi^{[\alpha]}(x)-\varphi^{[\alpha]}(x-\varepsilon)}{\Gamma(1-\{\alpha\})\varepsilon^{\alpha}} + \frac{\{\alpha\}}{\Gamma(1-\{\alpha\})}\left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]}\int_{x-\varepsilon}^{x-\delta}\frac{\varphi(x)-\varphi(\tau)}{(x-\tau)^{1+\{\alpha\}}}d\tau$$

$$0 < \alpha, -\infty < a \leq x \leq b < \infty$$

Тогда дробная производная Маршо в некотором функциональном пространстве H будет пониматься как

$$(D^{\alpha,-\varepsilon}f)(x) = \lim_{\substack{\delta\to 0\\ H}}\left(D_{\delta}^{\alpha,-\varepsilon}f\right)(x)$$

Локализованная дробная производная обобщает такие классические дробные производные как, дробные производные Римана-Лиувилля и Маршо [1]. Введенные производные обладают следующими свойствами отличающимися от классических дробных производных, но присущих обычным производным.

1) $(D^{\alpha,-\varepsilon}\varphi)(x) = \left(D^{\alpha,-\varepsilon}\varphi(\varphi + const)\right)(x);$

2) $\lim\limits_{\alpha\to 0}(D^{\alpha,-\varepsilon}\varphi)(x) = \lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_{x-\varepsilon}^{x}(x-t)^{-\alpha}\varphi(t)dt = \varphi(x) - \varphi(x-\varepsilon);$

Применение локальной дробной производной позволяет построить более простую формулу типа Тейлора имеющую только один член с дробной степенью и, что самое существенное, значительно ослабить требования на функцию.

Теорема. Пусть $0 < \{\alpha\} < \alpha, 0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon, f(x) \in H^{\lambda}(a;b), \lambda = [\alpha] + \sigma,$ $0 < \alpha < \sigma < 1$, тогда справедлив следующий аналог формулы Тейлора:

$$f(x+\varepsilon_1) = f(x) + \sum_{n=1}^{[\alpha]}\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\varepsilon_1^n + \frac{D^{\{\alpha\},-\varepsilon}f^{([\alpha])}(x)}{\Gamma(\alpha+1)}\varepsilon_1^{\alpha} + R(x,\varepsilon,\varepsilon_1)$$

где

$$R(x,\varepsilon,\varepsilon_1)=\frac{d}{dx}\int_{x}^{x+\varepsilon_1}\frac{(x+\varepsilon_1-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}D^{\{\alpha\},-\varepsilon}f^{([\alpha])}(t)dt-$$
$$-\left(\frac{d}{ds}\int_{s}^{s+\varepsilon_1}\frac{(s+\varepsilon_1-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\{\alpha\})}\int_{t-\varepsilon}^{s}\frac{f^{([\alpha])}(\tau)-f^{([\alpha])}(x)}{(t-\tau)}d\tau\right)_{s=x};$$

Если локальная дробная производная $D^{\{\alpha\},-\varepsilon}f^{([\alpha])}(x)$ – непрерывна в некоторой точке x, по ε и

1) $\frac{\lim_{\varepsilon\to 0}D^{\{\alpha\},-\varepsilon}f^{([\alpha])}(x)}{\lim_{\varepsilon_1\to 0}D^{\{\alpha\},-\varepsilon_1}f^{([\alpha])}(x+\varepsilon_1)}=1$, то $R(x,\varepsilon,\varepsilon_1)=o\left(\varepsilon_1^{\alpha}\varepsilon^{\sigma-\{\alpha\}}\right)$;

2) $\lim_{\varepsilon_1\to 0}D^{\{\alpha\},-\varepsilon_1}f^{([\alpha])}(x+\varepsilon_1)=D^{\{\alpha\},-\varepsilon}f^{([\alpha])}(x)$, то $R(x,\varepsilon,\varepsilon_1)=o(\varepsilon_1^{\alpha})$.

Применим теорему для разложения функции Вейерштрасса по формуле типа Тейлора. Для этого вычислим локализованную дробную производную от функции Вейерштрасса .

$$(D^{\alpha,-\varepsilon}W)(x+\varepsilon)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{x}^{x+\varepsilon}\frac{\lambda^{(s-2)k}sin'(\lambda^k t)}{(x+\varepsilon-t)^{\alpha}}dt=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{(s-1)k}\int_{x}^{x+\varepsilon}\frac{\cos(\lambda^k t)}{(x+\varepsilon-t)^{\alpha}}dt$$

С учётом теоремы получаем формулу типа Тейлора

$$W(x+\varepsilon_1)=W(x)+\frac{\varepsilon_1^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1+\alpha)}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{(s-1)k}\int_{x}^{x+\varepsilon}\frac{cos(\lambda^k t)}{(x+\varepsilon-t)^{\alpha}}dt$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. - 688 с.;

2. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. – Москва: Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с.;

3. Гринько А.П. Применение операторов локального дробного дифференцирования в формуле типа Тейлора/А.П. Гринько//Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения — III. Междунар. науч. конф, Ростов-на-Дону, 2-6 июля 2013 г., изд-во СКНЦ ВШ ЮФУ, Ростов н/Д, 2013, С. 16-17.