Решение некорректных уравнений матфизики явным методом итераций

Певкин Денис Евгеньевич

Студент 5 курса физико-математического факультета УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина"

Научный руководитель: доцент кафедры прикладной математики и информатики УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина", кандидат физико-математических наук, доцент *Савчук В.Ф.*

В гильбертовом пространстве H решается уравнение I рода

$$Ax = y, \tag{1}$$

где A – ограниченный, положительный, самосопряженный оператор, для которого нуль не является его собственным значением, причем нуль принадлежит спектру оператора, т.е. задача некорректна [1]. Предполагается, что при точной правой части y существует единственное решение x уравнения (1). Для отыскания решения уравнения (1) применим явный итерационный метод

$$x_{n+1} = (E - \alpha A^3)x_n + \alpha A^2 y, x_0 = 0, \tag{2}$$

который при приближенной правой части y_δ: $\|y - y_\delta\| \leq \delta$ примет вид

$$x_{n+1,\delta} = (E - \alpha A^3)x_{n,\delta} + \alpha A^2 y_\delta, x_{0,\delta} = 0. \tag{3}$$

Доказаны теоремы.

Теорема 1. *При условии* $0 < \alpha < \frac{2}{\|A\|^3}$ *метод* (2) *сходится в исходной норме гильбертова пространства.*

Теорема 2. *При условии* $0 < \alpha < \frac{2}{\|A\|^3}$ метод (3) *сходится в исходной норме гильбертова пространства, если число итераций* n *выбирать в зависимости от* δ, *так, чтобы* $n^{\frac{1}{3}}\delta \to 0, n \to \infty, \delta \to 0$.

Теорема 3. *Если* $x = A^s z, s > 0,$ *то при условии* $0 < \alpha \leq \frac{5}{4\|A\|^3}$ *для метода* (3) *справедливы оценки погрешности*

$$\|x - x_{n,\delta}\| \leq s^{\frac{s}{3}}(3n\alpha e)^{-\frac{s}{3}}\|z\| + \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{2}{3}} 3n^{\frac{1}{3}}\alpha^{\frac{1}{3}}\delta, n \geq 1,$$

$$\|x - x_{n,\delta}\| \leq s^{\frac{s}{3}}(3n\alpha e)^{-\frac{s}{3}}\|z\| + 3n^{\frac{1}{3}}\alpha^{\frac{1}{3}}\delta, n \geq 2. \tag{4}$$

Если оптимизировать по n оценку (4), то получим

$$\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}} \leq (1 + s)\left(\frac{s}{3}\right)^{-\frac{2s}{3(s+1)}} e^{-\frac{s}{3(s+1)}}\delta^{\frac{s}{s+1}}\|z\|^{\frac{1}{s+1}}, n \geq 2,$$

$$n_{\text{опт}} = s^{\frac{s+3}{s+1}} 3^{-\frac{s+3}{s+1}} \alpha^{-1} e^{-\frac{s}{s+1}} \|z\|^{\frac{3}{s+1}} \delta^{-\frac{3}{s+1}}.$$

Замечание. Оптимальная оценка не зависит от α, но $n_{\text{опт}}$ зависит от него, поэтому для уменьшения $n_{\text{опт}}$ и, следовательно, объема вычислительной работы следует брать α возможно, большим, удовлетворяющим условию $0 < \alpha \leq \frac{5}{4\|A\|^3}$.

Метод (2) пригоден и в случае неединственного решения, т.е. когда $\lambda = 0$ является собственным значением оператора A. Обозначим через $N(A) = \{x \in H |\ Ax = 0\}$, $M(A) = H \ominus N(A)$ – ортогональное дополнение ядра $N(A)$ до H. Пусть $P(A)x$ – проекция $x \in H$ на $N(A)$, а $\Pi(A)x$ – проекция $x \in H$ на $M(A)$. Справедлива

Теорема 4. *Пусть* $A \geq 0, y \in H, 0 < \alpha < 2\|A\|^{-3}$, *тогда для итерационного процесса* (2) *верны следующие утверждения:*

а) $Ax_n \to \Pi(A)y, \|Ax_n - y\| \to I(A, y) = inf_{x\in H}\|Ax - y\|$,
б) метод (2) *сходится тогда и только тогда, когда уравнение* $Ax = \Pi(A)y$ *разрешимо. В последнем случае* $x_n \to P(A)x_0 + x^*$, *где* x^**– минимальное решение уравнения.*

Метод (3) можно сделать эффективным и тогда, когда нет сведений об истокопредставимости точного решения, если воспользоваться энергетической нормой $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$ гильбертова пространства.

Доказано, что итерационный процесс (3) сходится при условии $0 < \alpha \leq \frac{5}{4\|A\|^3}$ в энергетической норме гильбертова пространства, если выбирать число итераций $n(\delta)$ из условий $n^{\frac{1}{6}}\delta \to 0, n \to \infty, \delta \to 0$.

При условии $0 < \alpha \leq \frac{5}{4\|A\|^3}$ для итерационного метода (3) получена оценка погрешности в энергетической норме гильбертова пространства, которая оптимизирована по n, и найдены $\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_A^{\text{опт}}$ и $n_{\text{опт}}$. Таким образом, использование энергетической нормы позволило нам получить для метода (3) оптимальную оценку погрешности и априорный момент останова $n_{\text{опт}}$ без дополнительного требования истокообразной представимости точного решения. В этом и состоит преимущество энергетической нормы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Савчук, В. Ф. Регуляризация операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В. Ф. Савчук, О. В. Матысик. – Брест : Брест гос. ун-т, 2008. – 196 с.