Об одной итерационной процедуре решения операторных уравнений с неограниченным оператором

Попека Владимир Николаевич

УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина"

Постановка задачи. В действительном гильбертовом пространстве H исследуем операторное уравнение I рода

$$Ax = y, \tag{1}$$

где A – неограниченный линейный и самосопряженный оператор, для которого нуль не является собственным значением, однако нуль принадлежит спектру оператора A, и, следовательно задача некорректна. Пусть $y \in R(A)$, т.е. при точной правой части y уравнение (1) имеет единственное решение x. Для отыскания этого решения применяется неявная итерационная процедура

$$x_{n+1} = (A^2 + B)^{-1}(Bx_n + Ay), \;\; x_0 = 0. \tag{2}$$

Здесь B – ограниченный вспомогательный самосопряженный оператор, который выбирается для улучшения обусловленности. В качестве B возьмем оператор $B = bE, b > 0,\; E$ – тождественный оператор. В случае приближенной правой части $y_\delta,\;\; \|y - y_\delta\| \le \delta$ итерационный процесс (2) запишется в виде

$$x_{n+1,\delta} = (A^2 + B)^{-1}\big(Bx_{n,\delta} + Ay_\delta\big), x_{0,\delta} = 0. \tag{3}$$

Для метода (3) изучен априорный выбор числа итераций. Доказано, что метод (3) сходится в исходной норме гильбертова пространства при условии $b > 0$, если число итераций n выбирается из условия $\sqrt{n}\,\delta \to 0,\;\; n \to \infty,\;\; \delta \to 0$.

В предположении, что точное решение x истокопредставимо, т.е. $x = A^{2s}z,\;\; s > 0$, для метода (3) получена оценка погрешности

$$\|x - x_{n,\delta}\| \le \left(\frac{bs}{2n}\right)^s \|z\| + \sqrt{\frac{n}{2b}}\,\delta,\;\; n > 2s. \tag{4}$$

Оценка погрешности (4) минимизирована по n. Найдено

$$n_{\text{опт}} = \left[2^{3-2s} s^{2(s+1)} b^{2s+1} \|z\|^2 \delta^{-2}\right]^{\frac{1}{2s+1}}. \tag{5}$$

В работе изучен случай неединственного решения, т.е. когда $\lambda = 0$ является собственным значением оператора A. Показано, что в этом случае метод (2) сходится к нормальному решению.

Метод (3) можно сделать эффективным и тогда, когда нет сведений об истокопредставимости точного решения, если воспользоваться правилом останова по невязке. В работе обоснована возможность применения правила останова по невязке

$$\left.\begin{matrix}\|Ax_{n,\delta}-y_\delta\|>\varepsilon,(n>m)\\ \|Ax_{m,\delta}-y_\delta\|\le\varepsilon,\end{matrix}\right\}\ \varepsilon=b_1\delta,\ \ b_1>1. \qquad (6)$$

Справедливы

Теорема 1. Пусть $A=A^*\ge 0, \|A\|\le M$ и пусть момент останова $m=m(\delta)$ в методе (3) выбирается по правилу (6). Тогда $x_{m,\delta}\to x$ при $\delta\to 0$.

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1. Если $x=A^{2s}z,\ s>0$, тогда справедливы оценки $m(\delta)\le 1+\frac{(2s+1)b}{4}\left[\frac{\|z\|}{(b_1-1)\delta}\right]^{\frac{2}{2s+1}}$,

$$\|x_{m(\delta),\delta}-x\|\le[(b_1+1)\delta]^{\frac{2s}{2s+1}}\|z\|^{\frac{1}{2s+1}}+\frac{1}{\sqrt{2b}}\left\{1+\frac{(2s+1)b}{4}\left[\frac{\|z\|}{(b_1-1)\delta}\right]^{\frac{2}{2s+1}}\right\}^{\frac{1}{2}}\delta. \qquad (7)$$

Замечание 1. Порядок оценки (7) есть $O\left(\delta^{\frac{2s}{2s+1}}\right)$, и он оптимален в классе истокопредставимых решений $x=A^{2s}z,\ s>0$ [1 – 2].

Замечание 2. Знание порядка $2s>0$ истокопредставимости точного решения, используемое в теореме 2, на практике не потребуется, так при останова по невязке автоматически делается нужное число итераций для получения оптимального по порядку решения.

Метод (3) можно сделать эффективным и тогда, когда нет сведений об истокопредставимости точного решения, если воспользоваться правилом останова по соседним приближениям

$$\|z_n-z_{n+1}\|>\varepsilon,(n<m),\ \|z_m-z_{m+1}\|\le\varepsilon, \qquad (8)$$

где ε – заданное до начала вычислений положительное число (уровень останова).

Для решения задачи (1) с несамосопряженным положительным ограниченным оператором A используем метод

$$z_{n+1}=(A^*A+B)^{-1}[Bz_n+A^*y_\delta]+(A^*A+B)^{-1}u_n,\quad z_0\epsilon H. \qquad (9)$$

Здесь u_n – ошибки вычисления итераций, $\|u_n\|\le\beta$. Обозначим $C=(A^*A+B)^{-1}$. Для простоты считаем, что $\|A\|=1$. Метод (9) примет вид $z_{n+1}=CBz_n+CA^*y_\delta+Cu_n$. Справедлива

Теорема 3. Пусть уровень останова $\varepsilon=\varepsilon(\delta,\beta)$ выбирается как функция от уровней δ и β норм погрешностей $y-y_\delta$ и u_n. Тогда справедливы следующие утверждения:

а) если $\varepsilon(\delta,\beta)>2\|C\|\beta$, то момент останова m определен при любом начальном приближении $z_0\epsilon H$ и любых y_δ и u_n, удовлетворяющих условиям $\|y-y_\delta\|\le\delta$, $\|u_n\|\le\beta$;

б) если $\varepsilon(\delta,\beta)>\|CA^*\|\delta+2\|C\|\beta$, то справедлива оценка

$$m\le\frac{\|z_0-x\|^2}{(\varepsilon-\|CA^*\|\delta-2\|C\|\beta)(\varepsilon-\|CA^*\|\delta)};$$

в) если кроме того, $\varepsilon(\delta,\beta)\to 0,\ \delta,\ \beta\to 0$ и $\varepsilon(\delta,\beta)\ge k(\|CA^*\|\delta+\|C\|\beta^p)$, где $k>1,\ p\epsilon(0,1)$, то $\lim_{\delta,\beta\to 0}\|z_m-x\|=0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Савчук, В. Ф. Регуляризация операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В. Ф. Савчук, О. В. Матысик. – Брест : Брест. гос. ун-т, 2008. – 196 с.
2. Матысик, О. В. Явные и неявные итерационные процедуры решения некорректно поставленных задач / О. В. Матысик. – Брест : Брест. гос. ун-т, 2014. – 213 с.