Приближенное решение операторных уравнений методом итераций неявного типа

Рак Марина Петровна

УО «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина»

Постановка задачи. В действительном гильбертовом пространстве H решается уравнение I рода

$$Ax = y, \tag{1}$$

где A – ограниченный, положительный, самосопряженный оператор, для которого нуль не является его собственным значением. Причем нуль принадлежит спектру оператора, т.е. задача некорректна. Предположим, что при точной правой части y существует единственное решение x уравнения (1). Для отыскания решения уравнения (1) применим итерационный метод

$$(E + \alpha A^2)x_{n+1} = (E - \alpha A^2)x_n + 2\alpha Ay,\ x_0 = 0. \tag{2}$$

Однако на практике часто правая часть y уравнения (1) бывает неизвестной, а вместо y известно приближение y_δ: $\|y - y_\delta\| \le \delta$, тогда метод (2) примет вид

$$(E + \alpha A^2)x_{n+1,\delta} = (E - \alpha A^2)x_{n,\delta} + 2\alpha Ay_\delta,\ x_{0,\delta} = 0. \tag{3}$$

Для метода (3) изучен априорный выбор числа итераций. Доказано, что метод (3) сходится в исходной норме гильбертова пространства при условии $\alpha > 0$, если число итераций n выбирать в зависимости от δ, так, чтобы $n^{\frac{1}{2}}\delta \to 0,\ n \to \infty, \delta \to 0$.

В предположении, что точное решение x истокопредставимо, т.е. $x = A^s z, s > 0$ при условии $\alpha > 0$ получена оценка погрешности для метода (3)

$$\|x - x_{n,\delta}\| \le s^{\frac{s}{2}}(2nae)^{-\frac{s}{2}}\|z\| + 4n^{\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{1}{2}}\delta. \tag{4}$$

Оценка погрешности (4) минимизирована по n. Найдено

$$n_{\text{опт}} = s^{\frac{s+2}{s+1}}2^{-\frac{s+4}{s+1}}\alpha^{-1}\|z\|^{\frac{2}{s+1}}\delta^{-\frac{2}{s+1}}. \tag{5}$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в оценку (4), получим оптимальную оценку погрешности для метода (3)

$$\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}} \le (1+s)2^{\frac{s}{s+1}}\left(\frac{S}{2}\right)^{-\frac{s}{2(s+1)}}e^{-\frac{s}{2(s+1)}}\delta^{\frac{s}{s+1}}\|z\|^{\frac{1}{s+1}}. \tag{6}$$

Сравнение метода (3) с явным методом итераций [1]

$$x_{n+1,\delta} = (E - \alpha A)x_{n,\delta} + \alpha y_\delta, x_{0,\delta} = 0 \tag{7}$$

показывает, что порядки их оптимальных погрешностей одинаковы, т.е. имеют порядок $O\left(\delta^{s/(s+1)}\right)$, но неявные методы обладают следующим важным достоинством. В явных методах на параметр α накладывается ограничение сверху (для метода (7)

$0 < \alpha \le \frac{5}{4\|A\|}$), что может привести к необходимости большого числа итераций. В неявных методах $\alpha > 0$, поэтому за счет выбора α оптимальную оценку можно получить уже на первом шаге итераций.

В работе изучен случай неединственного решения, т.е. когда $\lambda = 0$ является собственным значением оператора A. Показано, что в этом случае метод (2) сходится к нормальному решению.

Априорный выбор числа итераций был изучен в предположении, что точное решение x истокопредставимо, т.е. в этом предположении была получена оценка погрешности (4) и найден априорный момент останова $n_{\text{опт}}$. Если нет сведений об истокопредставимости точного решения, то нельзя получить оценку погрешности (4) и найти $n_{\text{опт}}$. Использование энергетической нормы $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$ позволяет получить оценку погрешности и найти $n_{\text{опт}}$, не требуя истокопредставимости точного решения.

Метод (3) можно сделать эффективным и тогда, когда нет сведений об истокопредставимости точного решения, если воспользоваться правилом останова по невязке. В работе обоснована возможность применения правила останова по невязке

$$\left.\begin{array}{l}\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon, (n < m),\\ \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \le \varepsilon,\end{array}\right\} \varepsilon = b\delta, b > 1. \tag{8}$$

Доказаны теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $A = A^* \ge 0$, $\|A\| \le M$ *и пусть момент останова* $m = m(\delta)$ *в методе* (3) *выбирается по правилу* (8). *Тогда* $x_{m,\delta} \to x$ *при* $\delta \to 0$.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы* 2. *Если* $x = A^s z$, $s > 0$, *то справедливы оценки* $m(\delta) \le 1 + \frac{s+1}{2\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{2}{s+1}}$,

$$\|x_{m,\delta} - x\| \le [(b+1)\delta]^{\frac{s}{s+1}}\|z\|^{\frac{1}{s+1}} + 4\alpha^{\frac{1}{2}}\left\{1 + \frac{s+1}{2\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{2}{s+1}}\right\}^{\frac{1}{2}}\delta. \tag{9}$$

Замечание. *Хотя формулировка теоремы* 2 *дается с указанием степени истокопредставимости* s *и истокопредставимого элемента* z, *на практике их значения не потребуются, так как они не содержатся в правиле останова* (8).

Метод (3) можно сделать эффективным и тогда, когда нет сведений об истокопредставимости точного решения, если воспользоваться правилом останова по соседним приближениям

$$\left.\begin{array}{l}\|z_n - z_{n+1}\| > \varepsilon, (n < m),\\ \|z_m - z_{m+1}\| \le \varepsilon,\end{array}\right\} \tag{10}$$

где ε – заданное до начала вычислений положительное число (уровень останова).

Для решения задачи (1) используем метод

$$z_{n+1} = (E + \alpha(A^*A)^2)^{-1}[(E - \alpha(A^*A)^2)z_n + \alpha(A^*A)A^*y_\delta] +$$
$$+(E + \alpha(A^*A)^2)^{-1}(E - \alpha(A^*A)^2)u_n,\ z_0 = 0. \tag{11}$$

Здесь u_n – ошибки вычисления итераций, $\|u_n\| \le \beta$. Обозначим $C = \left(E + \alpha(A^*A)^2\right)^{-1}(E - \alpha(A^*A)^2), B = 2\alpha(E + \alpha(A^*A)^2)^{-1}(A^*A)A^*$. Метод (11) примет вид $z_{n+1} = Cz_n + By_\delta + Cu_n$.

Обоснована возможность применения правила останова (10) к методу (11). Доказана теорема

Теорема 3. *Пусть уровень останова* $\varepsilon = \varepsilon(\delta, \beta)$ *выбирается как функция от уровней* δ *и* β *норм погрешностей* $y - y_\delta$ *и* u_n. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

а) если $\varepsilon(\delta, \beta) > 2\|C\|\beta$, *то момент останова* m *определен при любом начальном приближении* $z_0 \in H$ *и любых* y_δ *и* u_n, *удовлетворяющих условиям* $\|y - y_\delta\| \le \delta$, $\|u_n\| \le \beta$;

б) если $\varepsilon(\delta, \beta) > \|B\|\delta + 2\|C\|\beta$, *то справедлива оценка*

$$m \le \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)};$$

если, кроме того, $\varepsilon(\delta, \beta) \to 0, \delta, \beta \to 0$ *и* $\varepsilon(\delta, \beta) \ge d(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p)$, *где* $d > 1$, $p \in (0, 1)$, *то*

$$lim_{\delta, \beta \to 0}\|z_m - x\| = 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Савчук, В. Ф. Регуляризация операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В. Ф. Савчук, О. В. Матысик. – Брест : Брест. гос. ун-т, 2008. – 196 с.