Останов по поправке в методе итераций неявного типа решения операторных уравнений первого рода

Сахвон Маргарита Николаевна

УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина"

В гильбертовом пространстве H решается операторное уравнение $Ax = y_\delta$, где A – оператор положительный, ограниченный, несамосопряженный и $\|y - y_\delta\| \le \delta$. Предполагается, что $0 \in S_A$ (но не является собственным значением оператора A), поэтому рассматриваемая задача некорректна. Пусть $y \in R(A)$, т. е. при точной правой части y уравнение имеет единственное решение x. Будем искать его, используя неявный итерационный метод

$$z_{n+1} = Cz_n + By_\delta + Cu_n, \ \ z_0 \in H, \tag{1}$$

где $C = \left(E + \alpha A^* A\right)^{-1}\left(E - \alpha A^* A\right), B = \left(E + \alpha A^* A\right)^{-1} 2\alpha A^*$, $\alpha > 0$, а u_n – ошибки в вычислении итераций (причем $\| u_n\| \le \beta$). Для простоты считаем, что $\|A\| = 1$.

Предложенный метод можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова *по поправке* (*по соседним приближениям*): зададим уровень останова $\varepsilon > 0$ и момент останова m определим условиями $\|z_n - z_{n+1}\| > \varepsilon, (n < m), \quad \|z_m - z_{m+1}\| \le \varepsilon$ [1–2]. Справедливы леммы.

Лемма 1. *Пусть приближение* w_n *определяется равенствами* $w_0 = z_0$, $w_{n+1} = Cw_n + By + Cu_n$, $n \ge 0$, *тогда справедливо неравенство* $\sum_{k=0}^{n} \|w_k - w_{k+1} + Cu_k\|^2 \le \|w_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2$.

Лемма 2. *При любом* $w_0 \in H$ *и произвольной последовательности ошибок* $\{u_n\}$, *удовлетворяющих условию* $\|u_n\| \le \beta$, *выполнено неравенство* $\varliminf_{n\to\infty} \|w_n - w_{n+1}\| \le 2\|C\|\beta$.

Доказательство лемм 1 и 2 аналогично доказательству подобных лемм из [1, 3]. Леммы 1–2 используются при доказательстве следующей теоремы.

Теорема. *Пусть уровень останова* $\varepsilon = \varepsilon(\delta, \beta)$ *выбирается как функция от уровней* δ *и* β *норм погрешностей* $y - y_\delta$ *и* u_n. *Тогда справедливы утверждения:*

а) если $\varepsilon(\delta, \beta) > 2\|C\|\beta$, *то момент останова* m *определен при любом начальном приближении* $z_0 \in H$ *и любых* y_δ *и* u_n, *удовлетворяющих условиям* $\|y - y_\delta\| \le \delta, \quad \|u_n\| \le \beta$;

б) если $\varepsilon(\delta, \beta) > \|B\|\delta + 2\|C\|\beta$, *то справедлива оценка* $m \le \dfrac{\|z_0 - x\|^2}{\left(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta\right)\left(\varepsilon - \|B\|\delta\right)}$;

в) если, кроме того, $\varepsilon(\delta, \beta) \to 0$, $\delta, \beta \to 0$ и $\varepsilon(\delta, \beta) \ge d\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p\right)$, *где* $d > 1$, $p \in (0,1)$, *то* $\lim_{\delta,\beta\to 0} \|z_m - x\| = 0$.

Доказательство

а). По индукции нетрудно показать, что

$$z_n = C^n z_0 + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k \left(C^{-1}By_\delta + u_{n-k-1}\right), \tag{2}$$

отсюда $w_n = C^n w_0 + A^{-1}\left(E - C^n\right)y + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1}$. Учитывая, что $z_0 = w_0$, получим

$$\|z_n - z_{n+1}\| \le \|w_n - w_{n+1}\| + \left\|BC^n(y - y_\delta)\right\|. \tag{3}$$

Используя интегральное представление оператора, получим, что $\left\|BC^{\,n}\left(y - y_\delta\right)\right\| \to 0,\ n \to \infty$. Поэтому (см. лемму 2) $\varliminf_{n\to\infty} \|z_n - z_{n+1}\| \le \varliminf_{n\to\infty} \|w_n - w_{n+1}\| \le 2\|C\|\beta$. Следовательно, условием $\varepsilon(\delta,\beta) > 2\|C\|\beta$ момент останова m определен при любом начальном приближении $z_0 \in H$ и любых y_δ, $\|y_\delta - y\| \le \delta$, и u_n, $\|u_n\| \le \beta$.

б). Рассмотрим последовательность $w_0 = z_0,$ $w_{n+1} = Cw_n + By + Cu_n$, $n \ge 0$ и определим момент останова m' условием

$$\left.\begin{aligned} &\|w_n - w_{n+1}\| > \varepsilon - \|B\|\delta, \quad (n < m'), \\ &\|w_{m'} - w_{m'+1}\| \le \varepsilon - \|B\|\delta. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Из (3) следует, что $m \le m'$. Из леммы 1 при $n = m'$ получим

$$\sum_{k=0}^{m'} \|w_k - w_{k+1} + Cu_k\|^2 \le \|w_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{m'-1} \|Cu_k\|^2.$$

Отсюда $\sum_{k=0}^{m'-1} \|w_k - w_{k+1} + Cu_k\|^2 \le \|w_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{m'-1} \|Cu_k\|^2$. Так как при $n < m'$ имеем $\|w_n - w_{n+1}\| > \varepsilon - \|B\|\delta$, то $m'\left(\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta\right)^2 \le \|w_0 - x\|^2 + m'\|C\|^2\beta^2$.

Учитывая, что $w_0 = z_0$ и $m \le m'$, получим $m \le m' \le \dfrac{\|z_0 - x\|^2}{\left(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta\right)\left(\varepsilon - \|B\|\delta\right)}$.

в). Из (2) вычтем $x = C^n x + \sum_{k=0}^{n-1} BC^k y$, получим

$$z_n - x = C^n(z_0 - x) + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k\left[C^{-1}B(y_\delta - y) + u_{n-k-1}\right]. \tag{5}$$

Отсюда

$$\|\Delta_n\| \le \left\|C^n\Delta_0\right\| + \left(\|B\|\delta + \|C\|\beta\right)n, \tag{6}$$

где $\Delta_n = z_n - x$, $\Delta_0 = z_0 - x$. В частности, (6) справедливо и при $n = m$.

Так как спектр оператора $C=\left(E+\alpha A^{*}A\right)^{-1}\left(E-\alpha A^{*}A\right)$ принадлежит $[0,1]$, то нетрудно показать, что при $\alpha>0$ $\left\|C^{n}(E-C)\right\|\le\frac{1}{n+1}$. Поэтому из (5) при $n=m-1$ имеем $\left\|z_{m-1}-z_{m}\right\|\le\frac{2}{m}\left\|C^{\frac{m-1}{2}}\left(z_{0}-x\right)\right\|+\|B\|\delta+\|C\|(2+\ln m)\beta$.

Поскольку по условию теоремы $\varepsilon(\delta,\beta)\ge d\left(\|B\|\delta+\|C\|\beta^{p}\right)$, $d>1$, $p\in(0,1)$, то при всех достаточно малых δ,β выполняется неравенство $\varepsilon(\delta,\beta)>\|B\|\delta+2\|C\|\beta$, поэтому из б) получим $m\le\frac{\left\|z_{0}-x\right\|^{2}}{\left(\varepsilon-\|B\|\delta-2\|C\|\beta\right)\left(\varepsilon-\|B\|\delta\right)}$. Так как $\left\|z_{m-1}-z_{m}\right\|>\varepsilon$, то

$$\varepsilon\le\frac{2}{m}\left\|C^{\frac{m-1}{2}}\left(z_{0}-x\right)\right\|+\|B\|\delta+\|C\|(2+\ln m)\beta .$$

Отсюда

$$m\left(\|B\|\delta+\|C\|\beta\right)\le\frac{2\left\|C^{\frac{m-1}{2}}\left(z_{0}-x\right)\right\|\left(\|B\|\delta+\|C\|\beta\right)}{\varepsilon-\|B\|\delta-\|C\|\beta\left[2+\ln\frac{\left\|z_{0}-x\right\|^{2}}{\left(\varepsilon-\|B\|\delta-2\|C\|\beta\right)\left(\varepsilon-\|B\|\delta\right)}\right]} .$$

Следовательно, $m\left(\|B\|\delta+\|C\|\beta\right)\to 0$ при $m\to\infty$, $\delta,\beta\to 0$. Так как при $m\to\infty$ $\left\|C^{m}\Delta_{0}\right\|\to 0$, то

$$\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \beta\to 0}}\left\|\Delta_{m}\right\|\le\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \beta\to 0}}\left\|z_{m}-x\right\|\le\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \beta\to 0}}\left(\left\|C^{m}\Delta_{0}\right\|+m\left(\|B\|\delta+\|C\|\beta\right)\right)=0 .$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Емелин, И. В. Правило останова в итерационных процедурах решения некорректных задач / И. В. Емелин, М. А. Красносельский // Автоматика и телемеханика. – 1978. – № 12. – С. 59–63.

2. Савчук, В. Ф. Об одном неявном итеративном методе решения операторных уравнений / В. Ф. Савчук, О. В. Матысик // Доклады НАН Беларуси. – 2005. – Т. 49, № 4. – С. 38–42.

3. Савчук, В. Ф. Регуляризация операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В. Ф. Савчук, О. В. Матысик. – Брест : Брест. гос. ун-т. – 2008. – 195 с.