Нахождение приближенного решения задачи Дуффинга с помощью квазиньютоновского многошагового метода

Стаин Тимофей Сергеевич

УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина"

Рассмотрим одну из основных задач теории нелинейных колебаний – задачу Дуффинга для непериодического случая:

$$y''(x)+\alpha y'(x)+\beta y(x)+\gamma(y(x))^n=F(x),\quad \gamma\neq 0,$$

с краевыми условиями (1) 1-го или 2-го рода:

$$\begin{cases} y(a)=A \\ y(b)=B \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \alpha_1 y(a)+\alpha_2 y'(a)=A \\ \beta_1 y(b)+\beta_2 y'(b)=B \end{cases}$$

Суть разностного метода заключается в том, что производные, входящие в состав уравнения, заменяются их многоточечными разностными аппроксимациями. Рассмотрим особенности построения разностной схемы для случая непериодической задачи.

В начале построения разностной схемы задаем некоторое число k. В узлах, достаточно удаленных от начала и конца отрезка $[a,b]$ аппроксимации производных строятся по $2k+1$ точке (k точек слева от узла и k справа) методом неопределённых коэффициентов. В узлах, близких к началу (концу) отрезка, наблюдается нехватка точек аппроксимации слева (справа). Аппроксимации в этих узлах не симметричны, что ведет к увеличению погрешности. Однако такая схема позволяет применить $2k+1$ – диагональную прогонку, так как данная схема сводит задачу к решению последовательности СЛАУ с ленточными матрицами. В узлах, близких к началу и концу отрезка, можно также брать $2k+1$ точку аппроксимации: это уменьшит погрешность, однако матрицы будут иметь иной вид.

Для решения полученной в ходе дискретизации нелинейной численной системы используется следующий нерегуляризованный квазиньютоновский итерационный процесс, локально сходящийся с квадратичной скоростью [3]:

Шаг 1: Решается СЛАУ относительно поправки Δx_n

$$f'(x_n)\Delta x_n=-\sqrt{\beta_n}f(x_n),\, n=0,1,2\ \dots\ .$$

Шаг 2: Вносится поправка в вектор x_n:

$$x_{n+1}=x_n+\Delta x_n\,.$$

Шаг 3: Проверяется условие окончания вычислительного процесса:

если $\|f(x_{n+1})\|<\varepsilon,\qquad \varepsilon\ll 1,\qquad \varepsilon$ – параметр останова, то конец расчетов, иначе

Шаг 4: Вносится поправка в вычисление шаговой длины, если $\|f(x_{n+1})\|<\|f(x_n)\|$, то $\beta_{n+1}=1$, иначе – шаговая длина определяется по формуле:

$$\beta_{n+1}=\min(1,\frac{\gamma_n\|f(x_n)\|}{\beta_n\|f(x_{n+1})\|};\qquad \gamma_{n+1}=\frac{\gamma_n\|f(x_n)\|}{\|f(x_{n+2})\|}\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n};\gamma_0=\beta_0^2.$$

и осуществляется переход на Шаг 1.

Относительно процесса шаг1-шаг4 справедлива

Теорема: *Пусть в шаре* $S(x_0,r), r=\dfrac{B\|f(x_0)\|}{1-q_0}$ *выполняется условие теоремы* 1.1 [2]. *Тогда итерационный процесс шаг1-шаг4 при* $\varepsilon_0<1$ *со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к*

$x* \in S(x_0, r), \varepsilon_0 = 0.5KB^2 \sqrt{\beta_0} \| f(x_0) \|, q_0 = 1 - \beta_0 (1 - \varepsilon_0).$

Наряду с нерегуляризованным итерационным процессом может быть рассмотрен частично регуляризованный процесс, в котором на шаге 1 решается СЛАУ вида:

$$\left(\alpha\beta_n \| f(x_n) \| E + f'(x_n)\right) \Delta x_n = -\sqrt{\beta_n} f(x_n), n = 0,1,2 \dots .$$

Это позволяет исключить случай, когда производная Фреше $f'(x_n)$ на некотором шаге становится близкой к нуль-матрице, либо определитель этой производной становится близким к нулю. Остальные шаги рассмотренного выше итерационного процесса остаются такими же.

После получения сеточного решения будем восстанавливать это решение с помощью полиномов Чебышева I рода. Это возможно, так как, при аппроксимации производной методом неопределённых коэффициентов, мы можем приближать производную на произвольной сетке.

Полиномы Чебышова I рода позволяют производить аппроксимацию высокоточно в связи с тем, что они обладают высокой экономизацией полиномов.

Численные эксперименты, проводимые на модельных задачах, показали высокую эффективность рассмотренных выше итерационных процессов по сравнению и известным методом И.В Пузынина [1].

Рассмотренные выше итерационные процессы могут быть регуляризованы по аналогии с тем, как это делается в работе [2]. Это позволит повысить эффективность процессов, в связи с тем, что регуляризованные процессы «работают» с положительно определёнными матрицами, что значительно расширяет область применения итерационных методов.

В связи с тем, что задача Дуффинга является одной из важных задач теории нелинейных колебаний, идеи, обсуждаемые выше, могут быть с успехом распространены на общие нелинейные краевые дифференциальные задачи второго порядка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жанлав, Т. О сходимости на основе непрерывного метода Ньютона/ Т. Жанлав, И.В. Пузынин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1992. – Т. 32, № 6. – С.846-856.

2. Мадорский, В.М., Квазиньютовские процессы для решения нелинейных уравнений / В.М.Мадорский. – Брест, 2005. – 186 с.

3. Мадорский, В.М. О методах полного прогноза для решения нелинейных численных систем / В.М. Мадорский, Т.С. Стаин // Математические и физические методы исследований: научный и методический аспекты : тез. респ. науч.-практ. конф., посвященной 85-летию лауреата Нобелевской премии Ж.И. Алфёрова, Брест, 16-17 апр. 2015 г. / Брест. гос. ун-т. – Брест, 2015. – С. 28.