Решение задачи Дуффинга нелокальным квазиньютоновским методом полного прогноза

Стаин Тимофей Сергеевич

УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина"

Рассмотрим одну из основных задач теории нелинейных колебаний – задачу Дуффинга для непериодического случая:

$$y''(x)+\alpha y'(x)+\beta y(x)+\gamma(y(x))^n = F(x),\ \ \gamma \neq 0,$$

с краевыми условиями (1) 1-го или 2-го рода:

$$\begin{cases} y(a)=A \\ y(b)=B \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \alpha_1 y(a)+\alpha_2 y'(a)=A \\ \beta_1 y(b)+\beta_2 y'(b)=B \end{cases}$$

Эту задачу можно представить в операторном виде как $f(x)=0$.

Для решения этого уравнения применяется многошаговый итерационный процесс полного прогноза.

Шаг 1. Решается линейное уравнение относительно поправки Δx_n

$$f'(x_n)\Delta x_n = -f(x_n),\quad n=0,1,2,\ldots$$

Шаг 2. Вносится поправка в вектор x_n

$$x_{n+1}=x_n+\beta_n\Delta x_x,\quad \beta_0\in\left[10^{-3},10^{-1}\right]$$

Шаг 3. Если $\left\|f(x_{n+1})\right\|<\varepsilon,\ \ \varepsilon<<1$ (параметр останова), то конец просчетов, иначе

Шаг 4. Определяется новая шаговая длина: если $\left\|f(x_{n+1})\right\|<\left\|f(x_n)\right\|$, то β_{n+1} принимает значение 1, иначе

$$\beta_{n+1}=\min\left(1,\frac{\left\|f(x_n)\right\|\gamma_n}{\left(\left\|f(x_n+\Delta x_n)\right\|\right)\beta_n}\right),$$

$$\gamma_{\text{n+1}}=\frac{\gamma_n\left\|f(x_n)\right\|\left\|f(x_{n+1}+\Delta x_{n+1})\right\|}{\left\|f(x_n+\Delta x_n)\right\|\left\|f(x_{n+2})\right\|}\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n},\quad n=0,1,2,\ldots$$

$$\gamma_0=\frac{\beta_0^2\left\|f(x_0+\Delta x_0)\right\|}{\left\|f(x_1)\right\|},\quad \beta_0\in\left[10^{-3},10^{-1}\right]$$

и осуществляем переход на шаг 1.

Теорема. Пусть оператор f удовлетворяет в $D(x_0,r)$ условиям теоремы 1.1. [2] Тогда итерационный процесс шаг1–шаг4 при $\varepsilon_0<1$ со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходятся к $x^*\in D$.

Доказательство. Если $\beta_k\neq 1$, то взяв отношение β_{n+2} к β_{n+1} (n+2<k) имеем

$$\frac{\beta_{n+2}}{\beta_{n+1}}=\frac{\left\|f(x_{n+1})\right\|\gamma_{n+1}\left\|f(x_n+\Delta x_n)\right\|\beta_n}{f(x_{n+1}+\Delta x_{n+1})\beta_{n+1}\left\|f(x_n)\right\|\gamma_n}=\frac{\left\|f(x_{n+1})\right\|}{\left\|f(x_{n+2})\right\|}.$$

Из последнего соотношения следует равенство

$$\beta_{n+2}\left\|f(x_{n+2})\right\|=\beta_{n+1}\left\|f(x_{n+1})\right\|.$$

В силу условий теоремы имеет место оценка, связывающая нормы невязок на соседних шагах процесса

$$\|f(x_{n+1})\| \le \left(1-\beta_n\left(1-0.5\beta_n KB^2\|f(x_n)\|\right)\right)\|f(x_n)\| =$$
$$=\left(1-\beta_n(1-\varepsilon_n)\right)\|f(x_n)\| = q_n\|f(x_n)\|, \varepsilon_n = 0.5\beta_n KB^2\|f(x_n)\|,\ q_n = 1-\beta_n(1-\varepsilon_n).$$

Если $n = 0$, то из условий теоремы следует оценка.

$$\|f(x_1)\| \le \left(1-\beta_0(1-\varepsilon_0)\right)\|f(x_0)\| = q_0\|f(x_0)\| < \|f(x_0)\|.$$

Поскольку $q_0 < 1$, то соотношение, связывающее нормы невязок и шаговые длины на первых двух шагах имеет вид

$$\beta_1\|f(x_1)\| = \frac{\|f(x_0)\|\gamma_0}{\|f(x_0+\Delta x_0)\|\beta_0}\|f(x_1)\| = \beta_0\|f(x_0)\|.$$

Далее имеем, что $\varepsilon_1 = \varepsilon_0, \beta_1 > \beta_0$, так что

$$\|f(x_2)\| \le \left(1-\beta_1(1-\varepsilon_1)\right)\|f(x_1)\| = q_1\|f(x_1)\| \text{ и } q_1 < q_0.$$

Применяя метод математической индукции, имеем, что последовательности $\{\varepsilon_i\}$ с четными и нечетными индексами монотонно убывают и ограничены сверху числом ε_0, последовательности итерационных параметров $\{\beta_i\}$ с четными и нечетными индексами образуют монотонно возрастающие последовательности, которые ограничены снизу числом β_0, последовательности $\{q_i\}$ с четными и нечетными индексами образуют монотонно убывающие последовательности, ограниченные сверху числом q_0.

В связи с вышесказанным следует оценка

$$\|f(x_{n+1})\| \le \prod_{i=0}^{n} q_i\|f(x_0)\| < q_0^{n+1}\|f(x_0)\|.$$

Из последнего соотношения следует, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна и в силу полноты пространства имеем предел, который, как просто показать, является решением уравнения $f(x)=0$ и при этом все последовательные приближения не выходят за пределы сферы $D\left(x_0, \frac{B\|f(x_0)\|}{1-q_0}\right)$. Далее имеем, что существует такой номер l, начиная с которого станет выполняться неравенство $0.5KB^2\|f(x_l)\| < 1$. Если $\beta_l = 1$, то с этого момента процесс шаг1-шаг4 переходит в метод Ньютона с характерной для последнего квадратичной скоростью сходимости. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жанлав, Т. О сходимости на основе непрерывного метода Ньютона/ Т. Жанлав, И.В. Пузынин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1992. – Т. 32, № 6. – С.846-856.
2. Мадорский, В.М. Квазиньютовские процессы для решения нелинейных уравнений / В.М. Мадорский. – Брест, 2005. – 186 с.
3. Мадорский, В.М. О методах полного прогноза для решения нелинейных численных систем / В.М. Мадорский, Т.С. Стаин // Математические и физические методы исследований: научный и методический аспекты : тез. респ. науч.-практ. конф., посвященной 85-летию лауреата Нобелевской премии Ж.И. Алфёрова, Брест, 16-17 апр. 2015 г. / Брест. гос. ун-т. – Брест, 2015. – С. 28.