Сравнительный анализ решения интегрального уравнения численным и полиномиальным методами

Таранович Татьяна Павловна

УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина"

Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение Фредгольма:

$$u^{1+\alpha}(x) = \eta(x) \int\limits_{[a,b]} K(x,t)u(t)\,d\mu + \varphi(x), \tag{1}$$

где $K(x, t)$ – непрерывная функция по t, а по x также, как $u(x)$, $\eta(x)$ и $\varphi(x)$, принадлежит $L^2_{[a,\,b]}$, μ – обычная мера Лебега на отрезке, $\alpha \neq 0$.

Корень $u^*(x)$ уравнения будем приближать элементами ${}^nU(x)$ ($n \in N$ определяет параметр дискретизации $z = n + 1$) из всюду плотных в $L^2_{[a,\,b]}$:

1) множеств простых ограниченных функций $U \in l_{[a,\,b]}$, принимающих на отрезке $[a, b]$ не более чем счетное число значений;

2) множеств многочленов $U(x) \in P_{[a,\,b]}$, заданных на отрезке $[a, b]$.

Определим расстояние в H-пространстве $L^2_{[a,\,b]}$ по формуле:

$$\rho(u, v) = ||u - v|| = \left(\int\limits_{[a,b]} (u(x) - v(x))^2\, d\mu \right)^{1/2}. \tag{2}$$

Тогда для вычисления невязки уравнения (1) на приближении ${}^nU(x)$

$$\Phi({}^nU(x)) = ({}^nU(x))^{1+\alpha} - \eta(x) \int_a^b K(x,t)\, {}^nU(t)dt - \varphi(x), \tag{3}$$

в первом случае используем интерполяционный многочлен, построенный по $n+1$ значению сеточного решения ${}^zU = \{u_i,\ i = 0, \ldots, n\}$ при аппроксимации интегрального оператора суммарным, а во втором – приближение ${}^nu(x)$ корня (1), сразу полученное в базисе P^n. В зависимости от способа вычисления корня возникает две идеи его реализации. Первая – поиск *дискретного* решения в виде последовательности значений простой функции (здесь неизвестно $n+1$ значение сеточной функции ${}^zU$), вторая – поиск *непрерывного* решения в виде многочлена (здесь требуется найти $n+1$ коэффициент ${}^nu(x)$ интерполяционного многочлена Лагранжа).

Опишем алгоритм аппроксимации сеточной функции ${}^{m+1}U$ (простой ограниченной функции $u(x)$ из $l_{[a,\,b]}$) многочленом ${}^nu(x)$ наилучшего приближения по норме $L^2_{[a,\,b]}$ методом наименьших квадратов. Коэффициенты МНП ${}^nu(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k x^k$ вычислим из условия минимизации функционала Z

$$Z(c_0, c_1, \ldots, c_n) = \sum_{i=0}^{m} \left(\sum_{k=0}^{n} c_k x_i^k - u(x_i) \right)^2 \mu(\underline{x}_i),\ x_i \in {}^m\Omega_{[a,\,b]}. \tag{4}$$

Здесь Z – лебеговский интеграл квадрата разности простой функции $u(x)$ и ее МНП. Функция $Z({}^zc)$ достигает минимум в точке экстремума, для вычисления координат которой приравняем частные производные функции $Z({}^zc)$ к 0

$$\frac{\partial Z(c_0, c_1, \ldots, c_n)}{\partial c_j} \equiv 2 \sum_{i=0}^{m} \left(\sum_{k=0}^{n} c_k x_i^k - u_i \right) x_i^j\, \mu(\underline{x}_i) = 0,\ j = 0, \ldots, n. \tag{5}$$

Решение данной системы линейных уравнений позволяет сеточную функцию ${}^{m+1}U$ аппроксимировать многочленом ${}^nu(x)$ наилучшего приближения по норме пространства

$L^2_{[a,\,b]}$. В основу алгоритма поиска коэффициентов МНП с помощью матрицы Грама положен метод наименьших квадратов [1, с. 56–59], где интегральный оператор аппроксимируется суммарным.

Независимо от вида представления решения, идея функционального метода подчинена основной цели ВП. Изучая возможности того или иного метода решения уравнения (*), необходимо указать *достаточные* условия сходимости итерационной последовательности приближений $\{{}^n u(x),\, n \geq N\}$ к точному решению $u^*(x)$ в области локализации $Q[{}^N u,\, \delta] \subset U$.

Результаты дискретного и непрерывного (полиномиального) способов решения функционального уравнения (1) при $\eta(x) \equiv 1$, $K(x, t) \equiv 1$, $\varphi(x) = e^x - 2(\sqrt{e} - 1)$ и $\alpha = 1$ для различных значений параметра n, связанного с дискретизацией базового множества $X = [0;\, 1]$, сведем в таблицу.

Таблица 1. – Нормы погрешности приближений δ и невязки ε

n	$\delta_{дискр}$	$\delta_{дис\text{-}инт}$	$\varepsilon_{дис\text{-}инт}$	$\delta_{интерп}$	$\varepsilon_{интерп}$	$\delta_{дискр2}$	$\delta_{дис\text{-}инт2}$	$\varepsilon_{дис\text{-}инт2}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	*0,25*	*0,12*	$2{,}0\cdot10^{-1}$	$1{,}9\cdot10^{-3}$	$2{,}9\cdot10^{-3}$	*0,19*	$7{,}0\cdot10^{-3}$	$9{,}0\cdot10^{-3}$
4	*0,13*	$6{,}9\cdot10^{-2}$	$8{,}6\cdot10^{-2}$	$1{,}6\cdot10^{-6}$	$2{,}0\cdot10^{-6}$	*0,10*	$1{,}9\cdot10^{-3}$	$2{,}1\cdot10^{-3}$
8	*0,07*	$3{,}1\cdot10^{-2}$	$4{,}4\cdot10^{-2}$	$2{,}7\cdot10^{-13}$	$3{,}1\cdot10^{-13}$	*0,05*	$4{,}9\cdot10^{-4}$	$4{,}5\cdot10^{-4}$

Так как корнем тестового примера является бесконечно дифференцируемая функция $u^*(x) = \sqrt{e^x}$, то теоретически оба интерполяционных процесса решения сходятся к ряду Тейлора функции $u^*(x)$ на отрезке $[0;\, 1]$.

Однако достижение точности δ приближения интерполяционного метода при $n = 4$ с помощью дискретного метода, то есть, используя аппроксимацию интегрального оператора суммарным $2^{\text{-го}}$ порядка точности по h и интерполирование сеточного решения (1) многочленом ${}^n u(x)$ (см. графы 8, 9 таблицы 1), возможно лишь с параметром $n >> 16$.

Что касается чисто сеточного решения ${}^z U = \{u_i,\, i = 0,\, \ldots,\, n\}$, то для достижения на этом приближении точности $\delta = 1{,}6\cdot10^{-6}$ потребуется взять число интервалов $n >> 10^3$ (таблица 1, графа 7). Таким образом, погрешность $||{}^n U(x) - u^*(x)||$ при разных значениях параметра дискретизации $z = n + 1$ зависит от вида представления решения. Естественно, более приемлемыми методами решения функциональных уравнений являются методы, обладающие при равной погрешности приближения меньшим параметром дискретизации пространства решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Морозов, В. В. Прикладной анализ и программирование / В. В. Морозов. – Брест : Брест. гос. ун-т, 2012. – 246 с.