Полиномиальные методы решения экстремальных задач функционального анализа

Таранович Татьяна Павловна

УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина"

Математическая модель, описывающая реальный физический процесс, нередко представляет собой непрерывно дифференцируемый функционал, отображающий функциональное банахово пространство во множество действительных чисел. Искомым корнем исследуемой задачи является функция, при которой этот функционал принимает экстремальное значение. Численные градиентные методы решения экстремальных задач описаны в учебнике [1, с. 91–115]. Ниже предлагается методика поиска корней экстремальных задач полиномиальными методами в виде конечного отрезка функционального ряда над базисом всюду плотного в пространстве решений множества многочленов, сходящегося по норме к искомой функции.

Теорема [2, с. 580]. Если в точке $u(x)$ функционал $F: B \to R$, B – банахово пространство, для всех $\hbar \in B$ удовлетворяет условиям

1) $F'(u(x))\,\hbar = 0$,
2) $F''((u(x))(\hbar, \hbar) \geq c\,||\hbar||^2$, где $c > 0$,

то функционал F имеет в точке $u(x)$ минимум.

Пусть решение экстремальной задачи свелось к минимизации функционала, заданного на предкомпактном множестве пространства непрерывных функций. Требуется построить отрезок функционального ряда, аппроксимирующего функцию $u(x) \in C_{[a,\,b]}$ по норме с заданной точностью, то есть найти коэффициенты многочлена, минимизирующего функционал

$$F({}^z a) \equiv F({}^z a,\, u(x)) = ||u(x) - {}^n p(x)||_C, \tag{1}$$

где ${}^n p(x) = (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n)$, ${}^z a = (a_0,\, \ldots,\, a_n)$, $z = n + 1$.

По теореме Вейерштрасса функцию $u(x) \in C_{[a,\,b]}$ можно с любой точностью аппроксимировать на отрезке $[a, b]$ многочленом из $P^n_{[a,\,b]}$, $n \in N$. Однако в отличие от метода наименьших квадратов, где коэффициенты ${}^z a$ определяются через значения функции $u(x) \in L^2_{[a,\,b]}$ по интегральным формулам [3, с. 61], решить задачу (1) в явном виде сложно. Это связано с тем, что существование коэффициентов многочлена ${}^n p(x)$ обосновывается лишь теоретически. Функционал $F: R^z \to R$ (2) по теореме 2 достигает свое наименьшее значение в точке ${}^z a$, где производная Фреше $F'({}^z a) = 0$.

Поиск координат точки ${}^z a$, осуществим методом наискорейшего спуска (МНС) [1, с. 69]. Идея метода состоит в том, что при помощи производной Фреше определяется антиградиентное направление уменьшения нормы невязки нелинейного отображения. Пусть ${}^z a_0$ – нуль-приближение, с которого начинается итерационный процесс МНС, включающий на k-ой итерации определение параметра антиградиентного спуска $\lambda_k \in (0, 1]$ из условия

$$\min_{\lambda_k > 0} F({}^z a_k - \lambda_k \Delta a_k), \text{ где } \Delta a_k = [F'({}^z a_k)]^{-1} F({}^z a_k) \tag{2}$$

и вычисление следующего приближения по рекуррентной формуле

$$^{z}a_{k+1} = {}^{z}a_k - \lambda_k \Delta a_k,\ k = 0,\ 1,\ \ldots\ . \qquad (3)$$

Усилением алгоритма служит динамическая сетка отрезка $[a, b]$, являющаяся базой полиномиальных методов. То есть точки, в которых находятся поправки к значениям интерполяционного многочлена приближения исходной функции по норме $C_{[a,\,b]}$, могут не являться узлами равномерной сети. Координаты узлов динамической сетки будут соответствовать тем точкам отрезка, где были получены наибольшие уклонения супрополяционного многочлена от порождающей его функции.

В качестве примера найдем коэффициенты $^{5}a = (a_0,\ \ldots,\ a_4)$ многочлена наилучшего приближения по норме Чебышева непрерывной функции

$$u(x) = \begin{cases} 0{,}5 - x, \text{ если } x \le 0{,}5 \\ x - 0{,}5, \text{ если } x > 0{,}5 \end{cases},\ x \in [0;\ 1]. \qquad (4)$$

Численный эксперимент с описанным алгоритмом минимизации функционала (1) определил МНП функции $u(x)$ с наибольшим отклонением по чебышевской норме $\|u(x) - {}^{4}p(x)\|_C \le \delta = 3{,}44 \cdot 10^{-2}$, где

$$\begin{aligned} {}^{4}p(x) = {} & 0{,}4656030190643304354110717341805068479986 68 + \\ & + 0{,}4319592424384449567893885958840987688728 99\, x - \\ & - 9{,}0931314431457222944150792034462760630362 3\, x^2 + \\ & + 17{,}322344401414554675251381215124354588326 68\, x^3 - \\ & - 8{,}6611722007072773376256906075621772941633 4\, x^4. \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев, Ф. П. Методы решения экстремальных задач / Ф. П. Васильев. – М. : Наука, 1981. – 400 с.

2. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М. : Наука, 1989. – 624 с.

3. Морозов, В. В. Прикладной анализ и программирование / В. В. Морозов. – Брест : Брест. гос. ун-т, 2012. – 246 с.