Регуляризующий алгоритм некорректных задач в виде явного метода итераций с переменным шагом

Ташкинов Николай Николаевич

УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина"

Для решения линейного операторного уравнения $Ax = y_\delta$, где A – ограниченный, положительный, самосопряжённый оператор в гильбертовом пространстве и $\|y - y_\delta\| \le \delta$, предлагается явный метод итераций с переменным шагом

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} - \alpha_{n+1}\left(Ax_{n,\delta} - y_\delta\right), \quad x_{0,\delta} = 0,$$
$$\alpha_{3n+1} = \alpha, \quad \alpha_{3n+2} = \beta, \quad \alpha_{3n+3} = \gamma, \quad n = 0,1,2,\ldots . \tag{1}$$

Здесь $0 < \alpha < 2$, $\alpha + \beta < 8$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, $\left|(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)(1-\gamma\lambda)\right| < 1$. Рассматриваемая задача некорректна, так как $0 \in SpA$. Нуль не является собственным значением оператора A, поэтому уравнение $Ax = y_\delta$ имеет единственное решение. Считаем, что $\|A\| = 1$. Зададим уровень останова $\varepsilon > 0$ и момент останова m для метода (1) определим условиями [1–3]

$$\left.\begin{aligned} &\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon, \quad (n < m), \\ &\|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \le \varepsilon, \end{aligned}\right\} \quad \varepsilon = b\delta, \quad b > 1. \tag{2}$$

Предполагаем, что при начальном приближении $x_{0,\delta}$ невязка достаточно велика, больше уровня останова ε, т. е. $\|Ax_{0,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$. Справедлива [3]

Теорема 1. *Пусть* $A = A^* \ge 0$, $\|A\| \le 1$ *и пусть момент останова* $m = m(\delta)$ $(m = 3p, \quad p = 1,2,3,\ldots)$ *в методе* (1) *выбран по правилу* (2), *тогда* $x_{m,\delta} \to x$ *при* $\delta \to 0$.

Рассмотрим в пространстве $L_2(0,1)$ задачу в виде уравнения

$$\int_0^1 K(t,s)x(s)ds = y(t), \qquad 0 \le t \le 1 \tag{4}$$

с симметричным положительным ядром $K(t, s) = \dfrac{1}{1+100(t-s)^2}$. В качестве точного решения сформулированной задачи выберем функцию $x(s) = \begin{cases} s, & 0 \le s < \frac{1}{2}, \\ 1-s, & \frac{1}{2} \le s \le 1. \end{cases}$

С использованием квадратурной формулы правых прямоугольников при $m = 32$, $h = 1/m$ была вычислена в точках $t_i = ih$, $i = \overline{1,m}$ правая часть $y(t)$ интегрального уравнения (4).

Сформулированная задача относится к классу обратных задач теории потенциала. Обычно на практике мы не знаем точной функции $y(t)$, а вместо нее известны значения приближенной функции $\tilde{y}(t)$ в некотором числе точек с определенной, часто известной погрешностью δ, и по этим приближенным данным требуется приближенно найти решение. Чтобы имитировать эту ситуацию, будем считать заданными значения $\tilde{y}_i$, $i=\overline{1,m}$, полученные следующим образом $\tilde{y}_i = [\,y(t_i)\cdot 10^k + 0{,}5]\,/\,10^k$, квадратные скобки означают целую часть числа и $k=4$. При $k=4$ величина погрешности $\delta = 10^{-4}$. Действительно, $\int\limits_0^1 [y(t)-\tilde{y}(t)]^2\,dt \approx \sum\limits_{i=1}^{m}[y(t_i)-\tilde{y}_i]^2 h \le mh\left(10^{-k}\right)^2 = 10^{-2k}$. Заменим интеграл в уравнении (4) квадратурной суммой, например, по формуле правых прямоугольников с узлами $s_j = jh,\ j=\overline{1,m},\ h=1/m$, т. е. $\int\limits_0^1 K(t,s)x(s)ds \approx \sum\limits_{j=1}^{m} K(t,s_j)hx_j$. Тогда получим равенство $\sum\limits_{j=1}^{m} K(t,s_j)hx_j + \rho_m(t) = y(t)$, где $\rho_m(t)$ – остаток квадратурной замены. Записав последнее равенство в точках $t_i,\ i=\overline{1,m}$, получим уравнения $\sum\limits_{j=1}^{m} K(t_i,s_j)hx_j + \rho_m(t_i) = y(t_i)$, $i=\overline{1,m}$. Точные значения $y(t_i)$ мы не знаем, а знаем лишь приближения $\tilde{y}_i$ и, отбросив теперь остаточный член, получим линейную алгебраическую систему уравнений относительно приближенного решения

$$\sum_{j=1}^{m} K(t_i,s_j)hx_j = \tilde{y}_i\ , \quad i=\overline{1,m}. \tag{5}$$

Выберем для определенности $m=32$ и будем решать систему (5) методом итераций (1), который в дискретной форме запишется

$$x_i^{(n+1)} = x_i^{(n)} + \alpha_{n+1}\left[\tilde{y}_i - \sum_{j=1}^{m} K(t_i,s_j)hx_j^{(n)}\right],\ x_i^{(0)} = 0\,,$$

$$\alpha_{3n+1}=\alpha,\ \alpha_{3n+2}=\beta,\ \alpha_{3n+3}=\gamma, \quad i=\overline{1,m}. \tag{6}$$

Затем система (5) решалась методом простой итерации [1–2, 4–6], который в данном случае запишется

$$x_i^{(n+1)} = x_i^{(n)} + \alpha\left[\tilde{y}_i - \sum_{j=1}^{m} K(t_i,s_j)hx_j^{(n)}\right],\ x_i^{(0)} = 0\,, \quad i=\overline{1,m}. \tag{7}$$

При счете выбирались: $\alpha = 0{,}8,\ \beta = 4{,}4,\ \gamma = 5{,}6$. Задача была решена при $\delta = 10^{-4}$. При решении задачи итерационными методами (6) и (7) на каждом шаге итерации вычислялись: $\left\|Ax^{(n)} - \tilde{y}\right\|_m = \left\{\sum\limits_{i=1}^{m}\left[\sum\limits_{j=1}^{m} K(t_i,s_j)hx_j^{(n)} - \tilde{y}_i\right]^2 h\right\}^{1/2}$ – дискретная норма невязки, $\left\|x^{(n)}\right\|_m = \left\{\sum\limits_{i=1}^{m}\left[x_i^{(n)}\right]^2 h\right\}^{1/2}$ – норма приближенного решения и дискретная норма разности

между точным и приближенным решениями $\left\| x - x^{(n)} \right\|_m = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \left[x(t_i) - x_i^{(n)} \right]^2 h \right\}^{1/2}$.
Для решения задачи сведений об истокопредставимости точного решения не потребовалось, так как здесь воспользовались правилом останова по невязке (2), выбрав уровень останова $\varepsilon = 1{,}5\delta$. Итак, при $\delta = 10^{-4}$, $\varepsilon = 1{,}5 \cdot 10^{-4}$ для достижения оптимальной точности при счете методом итераций (6) потребовалось 10 итераций, при счете методом простой итерации (7) – 48 итераций. Пример счета показал, что для достижения оптимальной точности метод итераций (1) требует примерно в 4,5 раза меньше итераций, чем хорошо изученный в математической литературе метод простой итерации (7).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Емелин, И. В. К теории некорректных задач / И. В. Емелин, М. А. Красносельский // Доклады АН СССР. – 1979. – Т. 244, № 4. – С. 805–808.
2. Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г. М. Вайникко, А. Ю. Веретенников. – М. : Наука, 1986. – 178 с.
3. Матысик, О. В. Итерационная регуляризация некорректных задач / О. В. Матысик. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 188 с.
4. Лаврентьев, М. М. О некоторых некорректных задач математической физики / М. М. Лаврентьев. – Новосибирск : СО АН СССР, 1962. – 92 с.
5. Самарский, А. А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 480 с.
6. Денисов, А. М. Введение в теорию обратных задач / А. М. Денисов. – М. : МГУ, 1994. – 207 с.