Из истории развития теории итерационных методов решения некорректных задач

Василюк Ольга Александровна

УО "Брестский государственный университет»

В последние десятилетия математическая наука обогатилась важным разделом – теорией некорректно поставленных задач и методов их приближенного решения. Развитие этого раздела математики вызвано многочисленными приложениями в технике, физике, экономике и других естественных науках, поскольку, прежде всего, в приложениях возникают и имеют большое значение подобные некорректные задачи.

Потребности практики приводят к необходимости решения подобных задач, которые во многих случаях описываются операторными уравнениями I рода. В настоящее время теория некорректных задач успешно применяется для решения широкого круга обратных задач оптики и спектроскопии, электродинамики, радиоастрономии, диагностики плазмы, геофизики, теории потенциала и гравиметрии. Для их решения широко используются итерационные схемы, позволяющие при обработке экспериментальной информации существенно повысить точность определения характеристик изучаемых физических явлений. Поэтому огромное значение имеют разработка и изучение новых итерационных методов решения некорректных задач, получение условий их сходимости, нахождение оценок погрешности и обоснование применения к методам правил останова в процессе вычислений. Изложим некоторые факты из истории развития теории итерационных методов решения некорректных задач.

Лаврентьев М.М. в работе [1] для операторного уравнения I рода $Au = f$, где A – линейный вполне непрерывный оператор, $A = A^* > 0$, $\|A\| \le 1$ и $0 \in S_A$ при приближенной правой части $f_\delta : \|f - f_\delta\| \le \delta$ рассмотрел применение явной итеративной схемы: $u_n = u_{n-1} - (Au_{n-1} - f_\delta)$, $u_0 = f_\delta$. Здесь доказана сходимость предложенного итеративного метода к точному решению уравнения $\bar{u}$ при специальном выборе $n = n(\delta)$ (при согласовании с погрешностью δ), т.е. показано, что $u_n \to \bar{u}$, когда $n\delta \to 0$, $\delta \to 0, n \to \infty$. Получена оценка погрешности метода: $\|u_n - \bar{u}\| \le \omega\left(\frac{1}{n+2}\right) + n\delta$. Здесь же автором была обоснована сходимость предложенного метода последовательных приближений для некоторых классов нелинейных операторных уравнений.

При других предположениях метод простой итерации был исследован *Антохиным Ю.Т.* [2]. Здесь рассматривается уравнение $Ax = f$ в гильбертовом пространстве, $A = A^*$ – линейный, неограниченный оператор, со всюду плотной областью определения $D(A)$. Для оператора 0 служит точкой его же спектра, но в тоже время не является собственным значением, т.е. существует последовательность $\{x_n\}$ такая, что $\|x_n\| = 1$, $\|Ax_n\| \to 0, n \to \infty$ и $Ax_n \ne 0$ при $x \ne 0$. В дальнейшем предполагается, что решение уравнения существует. Предложенная здесь схема явного метода последовательных приближений выглядит так: $x_1 = f$, $x_n = \left(E - \frac{1}{n}A\right)x_{n-1} + \frac{1}{n}f$, $E -$ тождественный оператор. Для данного метода при условии, что оператор $A = A^* > 0$, доказана сходимость $\|R_n\|^2 = \|x - x_n\|^2 \to 0,\ n \to \infty$ и получена следующая оценка погрешности

$\|R_n\|^2 = \int\limits_0^{\|A\|} |r_n(\lambda)|^2 \, d\,(E_\lambda x, x) \le \int\limits_0^{\varepsilon} d\,(E_\lambda x, x) + \left(\frac{K_1^{\,2}}{n^{2\varepsilon}} + \frac{1}{(n!)^2}\right) K^2$, где $\forall\, \varepsilon \in (0,1)$: $|r_n| \le 1$ при $0 \le \lambda \le \varepsilon$; $|r_n| \le K_1(\varepsilon)/n^{\varepsilon}$ при $\varepsilon \le \lambda \le n+1-\varepsilon$; $|r_n| \le \lambda^n / n!$ при $n < \lambda$, в предположении, что $f \in D(A^n)$, $n = 1,2,\ldots$, причем $\|A^n f\| \le K$ ($K \ne K(n)$) и $K_1(\varepsilon) = \text{const}, \|x\| \le K$.

Апарциным А.С. [3] в гильбертовом пространстве *H* решается уравнение I рода $A\varphi = f$ с положительным самосопряженным вполне непрерывным оператором *A*. Предполагается, что уравнение разрешимо. Пусть $\overline{\varphi}$ – нормальное решение (случай неединственного рассматриваемого операторного уравнения). Хорошо известно, задача нахождения $\overline{\varphi}$ некорректна. В настоящей работе рассматривается явная итерационная процедура вида $\varphi_{n+1,\alpha_{n+1}} = [(1-\mu\alpha_n)E - \mu A]\varphi_{n,\alpha_n} + \mu f$, $\varphi_{0,\alpha_0} = \mu f$, которая является дискретным аналогом линейного дифференциального уравнения $\frac{dW(t)}{dt} + [\alpha(t)E + A]W(t) = f$, где $E -$ тождественный оператор, $W(t_0) = W_0 \in H$, $\alpha(t)$ – положительная монотонно убывающая функция при $t \ge t_0$ и $\lim\limits_{t\to\infty} \alpha(t) = 0$. Доказана сходимость предложенной процедуры при приближенной правой части уравнения ($\|f - f_n\| \le \delta_n$), и когда оператор *A* заменяют некоторым более удобным для вычислений «приближенным оператором» (если *A* – интегральный оператор, то его заменяют квадратурной формулой).

Крянев А.В. [4] решает линейное уравнение *Ax* = *y*, где $A: H \to H$ – ограниченный, самосопряженный, линейный и неотрицательный оператор. Если *A* – вполне непрерывный, то $A(H) \ne H$ (задача некорректна, так как не для всех $y \in H$ разрешима). Рассмотрен случай неединственного решения данного уравнения. В гильбертовом пространстве *H* вводится оператор *B* – ограниченный, самосопряженный, линейный и положительно определенный, для которого $M_B = \sup\limits_{\|x\|=1}(Bx, x)$, $m_B = \inf\limits_{\|x\|=1}(Bx, x) > 0$ и $M_A = \sup\limits_{\|x\|=1}(Ax, x)$. При сделанных предположениях определен оператор $C = (A+B)^{-1}B$, спектральный радиус которого, очевидно, равен 1. Для решения линейного уравнения автор предлагает неявный итерационный процесс $Ax_n + Bx_n = Bx_{n-1} + f$, который можно переписать в эквивалентной форме: $x_n = Cx_{n-1} + (A+B)^{-1} f$. Доказана сходимость метода при точной и приближенной правой части уравнения. Рассмотрен случай суммарных возмущений оператора и правой части уравнения: ΔA и Δf, получена оценка погрешности метода

Фридман В.М. в статье [5] для решения в гильбертовом пространстве уравнения I рода $Lx = Ax - y = 0$ с линейным ограниченным оператором *A* предлагает итерационный метод $x_{n+1} = x_n - \frac{\|Lx_n\|^2}{\|A^* Lx_n\|^2} A^* Lx_n$. С использованием интегрального представления оператора $A^* A$ рассмотрен случай неединственного решения уравнения (рассматриваемая задача некорректна) и доказана сходимость предлагаемого метода.

Страховым В.Н. [6] в гильбертовом пространстве H решается уравнение I рода $f=(E-T)\varphi$, где оператор $T{=}T^{*}\geq 0$ и $\|T\|=1$, $1\in S_T$, $f\in R(E-T)$. Для решения уравнения предлагается итерационная схема $\varphi_n=T\varphi_{n-1}+f$, из которой следует $\varphi-\varphi_n=T^n(\varphi-\varphi_0)$. С помощью интегрального представления положительного самосопряжённого оператора T получено: $\|\varphi-\varphi_n\|^2=\int_0^1\mu^{2n}\,d(E_\mu(\varphi-\varphi_0),\varphi-\varphi_0)$. Доказана сходимость метода и для получения оценки $\left(\|\varphi-\varphi_n\|=O\left(\frac{1}{n^x}\right)\right)$ использовалось предположение об истокопредставимости точного решения, т.е. $\varphi\in R\left((E-T)^x\right)$, $x>0$.

В работе [7] *Страхов В.Н.* решает операторное уравнение I рода $A\varphi=f$ $\left(\|A^{-1}\|=+\infty\right)$ методом $\varphi_0=f_0$, $\varphi_n=(E-A)\varphi_{n-1}+f$, потребовав $\|E-A\|=1$. Автором используется начальное приближение: $\varphi_0=f_0$, где f_0 – произвольная функция из гильбертова пространства $H=L_2(-\infty,+\infty)$. В работе доказана сходимость метода: $\|\varphi_n-\varphi\|=\left\|(E-A)^n(\varphi_0-\varphi)\right\|\to 0,\ n\to\infty.$ Оценка погрешности метода не получена.

В [8] *Bialy H.* решает уравнение I рода $Ax=y$, где H – полное, сепарабельное гильбертово пространство, $A:H\to H$ – линейный ограниченный положительный оператор, 0 является его собственным значением (решение уравнения неединственно). Для решения рассматриваемого уравнения используется следующая итеративная схема $x_n=x_{n-1}+\tau(y-Ax_{n-1})$, $x_0\in H$, $0<\tau<\frac{2}{\|A\|}$. Доказана сходимость метода в случае неединственного решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1.Лаврентьев, М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики / М.М. Лаврентьев. – Новосибирск : СО АН СССР, 1962. – 92 с.

2. Антохин, Ю.Т. О некоторых задачах аналитической теории уравнений I-го рода / Ю.Т. Антохин // Дифференц. уравнения. – 1966. – Т. 2, № 2. – С. 226–240.

3. Апарцин, А.С. К построению сходящихся итерационных процессов в гильбертовом постранстве / А.С. Апарцин // Тр. по приклад. мат. и киберн. / Сиб. энергет. ин-т, СО АН СССР. – Иркутск, 1972. – С. 7–14.

4. Крянев, А.С. Итерационный метод решения некорректных задач / А.С. Крянев // Журн. вычисл. Мат. и мат. физ. – 1974. – Т. 14, № 1. – С. 25–35.

5 Фридман, В.М. О сходимости методов типа наискорейшего спуска / В.М. Фридман // Успехи мат. наук. – 1962. – Т.17, Вып.3. – С. 201–204.

6. Страхов, В.Н. К вопросу о скорости сходимости в методе простой итерации / В.Н. Страхов // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. – 1973. – Т. 13, № 6. – С. 1602–1606.

7. Страхов, В.Н. О решении некорректных задач магнито- и гравиметрии, представляемых интегральными уравнениями типа свёртки / В.Н. Страхов // Изв. АН СССР. Физика Земли. – 1967. – № 4. – С. 36–54.

8. Bialy, H. Iterative Behandlung Linearer Funktionsgleichungen / H. Bialy // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1959. – Vol. 4, №. 2. – P. 166–176.