Регуляризация прикладных некорректных задач математической физики

Ворошкевич Анастасия Николаевна, Бриштен Евгений Геннадьевич

УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина"

В вещественном гильбертовом пространстве H решается линейное операторное уравнение

$$Ax = y, \tag{1}$$

где A – ограниченный, положительный, самосопряженный оператор, для которого нуль не является его собственным значением. Причем нуль принадлежит спектру оператора, поэтому задача неустойчива и, следовательно, некорректна. Предполагается, что при точной правой части y существует единственное решение x уравнения (1). Для отыскания решения уравнения (1) применим явный итерационный метод

$$x_{n+1} = (E - \alpha A)^3 x_n + A^{-1}[E - (E - \alpha A)^3]y, x_0 = 0, \tag{2}$$

который при приближенной правой части y_δ: $\|y - y_\delta\| \le \delta$ примет вид

$$x_{n+1,\delta} = (E - \alpha A)^3 x_{n,\delta} + A^{-1}[E - (E - \alpha A)^3]y_\delta, x_{0,\delta} = 0, \tag{3}$$

Для метода (3) изучен априорный выбор числа итераций. Доказано, что метод (3) сходится в исходной норме гильбертова пространства при условии $0 < \alpha < \frac{2}{\|A\|}$, если выбирать число итераций n из условия $n\delta \to 0,\ n \to \infty, \delta \to 0$.

В предположении, что точное решение x истокопредставимо, т.е. $x = A^s z, s > 0$ при условии $0 < \alpha \le \frac{5}{4\|A\|}$ получена оценка погрешности для метода (3)

$$\left\|x - x_{n,\delta}\right\| \le s^s (3n\alpha e)^{-s}\|z\| + 3n\alpha\delta. \tag{4}$$

Оценка погрешности (4) минимизирована по n. Найдено

$$n_{\text{опт}} = s(3\alpha)^{-1} e^{-\frac{s}{s+1}}\|z\|^{\frac{1}{s+1}}\delta^{-\frac{1}{s+1}}. \tag{5}$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в оценку (4), получим оптимальную оценку погрешности для метода (3)

$$\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_{\text{опт}} \le (1 + s)e^{-\frac{s}{s+1}}\delta^{\frac{s}{s+1}}\|z\|^{\frac{1}{s+1}}. \tag{6}$$

В работе изучен случай неединственного решения, т.е. когда $\lambda = 0$ является собственным значением оператора A. Показано, что в этом случае метод (2) сходится к решению с минимальной нормой.

Априорный выбор числа итераций был изучен в предположении, что точное решение x истокопредставимо, т.е. в этом предположении была получена оценка погрешности (4) и найден априорный момент останова $n_{\text{опт}}$.

Если нет сведений об истокопредставимости точного решения, то нельзя получить оценку погрешности (4) и найти $n_{\text{опт}}$. Использование энергетической нормы $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$ [1] позволяет получить оценку погрешности и найти $n_{\text{опт}}$, не требуя истокопредставимости точного решения.

При условии $0 < \alpha \le \frac{5}{4\|A\|}$ для итерационного метода (3) получена оценка погрешности в энергетической норме гильбертова пространства

$$\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_{\mathrm{A}} \le (6nae)^{-1/2}\|x\| + [\left(\tfrac{35}{54}\right)3n\alpha]^{1/2}\delta,$$

которая оптимизирована по n, и найдены $\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_A^{\text{опт}}$ и $n_{\text{опт}}$. Таким образом, использование энергетической нормы позволило нам получить для метода (3) оптимальную оценку погрешности и априорный момент останова $n_{\text{опт}}$ без дополнительного требования истокообразной представимости точного решения. В этом и состоит преимущество энергетической нормы.

Метод (3) можно сделать эффективным и тогда, когда нет сведений об истокопредставимости точного решения, если воспользоваться правилом останова по невязке. В работе обоснована возможность применения правила останова по невязке

$$\left.\begin{aligned}&\left\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\right\| > \varepsilon, (n < m),\\ &\left\|Ax_{m,\delta} - y_\delta\right\| \le \varepsilon,\end{aligned}\right\} \varepsilon = b\delta, b > 1. \tag{7}$$

Доказана теорема.

Теорема. *Пусть* $A = A^* \ge 0$, $\|A\| \le M$ *и пусть момент останова* $m = m(\delta)$ *в методе* (3) *выбирается по правилу* (7). *Тогда* $x_{m,\delta} \to x$ *при* $\delta \to 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Савчук, В. Ф. Регуляризация операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В. Ф. Савчук, О. В. Матысик. – Брест : Брест гос. ун-т, 2008. – 196 с.