Решение прикладных некорректных задач матфизики неявным методом итераций

Жешко Дмитрий Александрович

УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина"

Постановка задачи. В действительном гильбертовом пространстве H решается операторное уравнение I рода

$$Ax = y, \tag{1}$$

где A – ограниченный положительный самосопряженный оператор, для которого нуль не является его собственным значением. Причем нуль принадлежит спектру оператора A, поэтому задача (1) неустойчива и, следовательно, некорректна. Для решения уравнения (1) применим неявный итерационный метод

$$\left(E+\alpha A^3\right)x_{n+1}=\left(E-\alpha A^3\right)x_n+2\alpha A^2 y, x_0=0. \tag{2}$$

Однако на практике часто правая часть y уравнения (1) бывает неизвестной, а вместо y известно приближение $y_\delta : \|y-y_\delta\| \le \delta,$ тогда метод (2) примет вид:

$$\left(E+\alpha A^3\right)x_{n+1,\delta}=\left(E-\alpha A^3\right)x_{n,\delta}+2\alpha A^2 y_\delta, x_{0,\delta}=0. \tag{3}$$

Для метода (3) изучен априорный выбор числа итераций. Доказано, что метод (3) при условии $\alpha>0$ сходится в исходной норме гильбертова пространства, если число итераций $n(\delta)$ выбирать зависящим от δ так, чтобы $n^{1/3}\delta \to 0, n\to\infty, \delta\to 0.$

В предположении, что точное решение x истокопредставимо, т.е. $x = A^s z, s>0$ при условии $\alpha>0$ получена оценка погрешности для метода (3)

$$\|x-x_{n,\delta}\| \le s^{s/3}(3n\alpha e)^{-s/3}\|z\| + 6n^{1/3}\alpha^{1/3}\delta, n\ge 1. \tag{4}$$

Оценка погрешности (4) минимизирована по n. Найден

$$n_{опт} = 2^{-3/(s+1)}\left(\frac{s}{3}\right)^{(s+3)/(s+1)}\alpha^{-1}e^{-s/(s+1)}\|z\|^{3/(s+1)}\delta^{-3/(s+1)}.$$

Подставив $n_{опт}$ в оценку (4), получим оптимальную оценку погрешности для метода (3)

$$\|x-x_{n,\delta}\|_{опт} \le (1+s)2^{s/(s+1)}\left(\frac{s}{3}\right)^{-2s/(3(s+1))} e^{-s/(3(s+1))}\|z\|^{1/(s+1)}\delta^{s/(s+1)}. \tag{5}$$

В неявном методе (3) $\alpha>0$, поэтому за счет выбора α оптимальную оценку можно получить уже на первом шаге итераций.

В работе изучен случай неединственного решения, т.е. когда $\lambda=0$ является собственным значением оператора A. Показано, что в этом случае метод (2) сходится к нормальному решению.

Априорный выбор числа итераций был изучен в предположении, что точное решение x истокопредставимо, т.е. в этом предположении была получена оценка погрешности (4) и найден априорный момент останов $n_{опт}$. Если нет сведений об истокопредставимости точного решения, то нельзя получить оценку (4) и найти $n_{опт}$.

В работе показано, что использование энергетической нормы $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$ позволяет получить оценку погрешности и $n_{опт}$, не требуя знания истокопредставимости точного решения.

В работе обоснована возможность применения к методу (3) правила останова по невязке, что делает метод (3) эффективным и тогда, когда нет сведений об истокопредставимости точного решения. Зададим уровень останова $\varepsilon > 0$ и момент останова m определим условиями [1]

$$\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon, (n < m), \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \le \varepsilon, \varepsilon = b\delta, b > 1. \tag{7}$$

Справедлива

Теорема. *Пусть* $A = A^* \ge 0, \|A\| \le M$ *и пусть момент останова* $m = m(\delta)$ *в методе* (3) *выбирается по правилу* (7). *Тогда* $x_{m,\delta} \to x$ *при* $\delta \to 0$.

Обоснована возможность применения к методу (3) правила останова по соседним приближениям

$$\| z_n - z_{n+1} \| > \varepsilon, (n < m), \| z_m - z_{m+1} \| \le \varepsilon,$$

где $\varepsilon -$ заданное до начала вычислений положительное число (уровень останова).

Применение правила останова по соседним приближениям делает метод (3) эффективным и тогда, когда нет сведений об истокопредставимости точного решения уравнения (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Савчук, В. Ф. Регуляризация операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В. Ф. Савчук, О. В. Матысик. – Брест : Брест гос. ун-т, 2008. – 196 с.