Случай приближенно заданного оператора в неявном методе решения операторных уравнений

Басина Сабина Игоревна

Студентка 3 курса физико-математического факультета УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина"

Научный руководитель: заведующий кафедрой прикладной математики и информатики УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина", кандидат физико-математических наук, доцент *Матысик О.В.*

В действительном гильбертовом пространстве H решается операторное уравнение первого рода

$$Ax = y, \tag{1}$$

где A – ограниченный положительный самосопряженный оператор. Предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора A, но не является его собственным значением, т.е. рассматриваемая задача неустойчива, и, значит, некорректна. Будем искать решение уравнения (1), используя неявную схему метода итераций

$$x_{n+1} = x_n - \alpha\left(Ax_{n+1} - y\right), \quad x_0 = 0. \tag{2}$$

В случае приближенной правой части y_δ, $\|y - y_\delta\| \le \delta$ метод (2) примет вид

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} - \alpha\left(Ax_{n+1,\delta} - y_\delta\right), \quad x_{0,\delta} = 0. \tag{3}$$

Рассмотрим случай, когда счет ведется по методу (3) не с оператором A, а с оператором A_h, $\|A - A_h\| \le h$. Введем погрешность $\eta_n = u_n - x_n$, где

$$\left(E + \alpha A_h\right)u_{n+1} = u_n + \alpha y, \quad u_0 = 0. \tag{4}$$

Имеем $\left(E + \alpha A_h\right)u_{n+1} - \left(E + \alpha A_h\right)x_{n+1} = u_n + \alpha y - \left(E + \alpha A_h\right)x_{n+1}$. Тогда

$$\left(E + \alpha A_h\right)\eta_{n+1} = (u_n - x_n) + (x_n + \alpha y) - \left(E + \alpha A_h\right)x_{n+1}.$$

Из (4) следует $\left(E + \alpha A_h\right)\eta_{n+1} = \eta_n + \alpha\left(A - A_h\right)x_{n+1}$. Отсюда имеем $\left(E + \alpha A_h\right)\eta_{n+1} = \eta_n + \alpha Bx_{n+1}$, где $B = A - A_h$, $\|B\| \le h$, $\eta_0 = 0$. По индукции нетрудно показать, что $\eta_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left(E + \alpha A_h\right)^{-(k+1)}\alpha Bx_{n-k}$.

Так как $\|x_n\| = \left\|A^{-1}\left[E - \left(E + \alpha A\right)^{-n}\right]y\right\| \le n\alpha\|y\|$, то $\|x_{n-k}\| \le (n-k)\alpha\|y\|$. Для оценки $\left\|\left(E + \alpha A_h\right)^{-(k+1)}\right\|$ потребуем, чтобы пространство H было сепарабельным и оператор A_h сокоммутировал с A, тогда [1, с. 388] он является функцией оператора A, т. е. $A_h = \int\limits_0^M \varphi(\lambda) dE_\lambda$ и спектральная функция у этих операторов одна и та же. Следовательно, $\|A - A_h\| = \max\limits_{[0,M]} |\lambda - \phi(\lambda)| \le h$, так что $\left\|(E + \alpha A_h)^{-(k+1)}\right\| = \max\limits_{[0,M]} \frac{1}{|1+\alpha\phi(\lambda)|^{k+1}} \le \max\limits_{[0,M]} \frac{1}{|1+\alpha(\lambda-h)|^{k+1}} \le \frac{1}{|1-\alpha h|^{k+1}}$. Поэтому, считая $\alpha h < 1$, имеем $\|\eta_n\| \le \alpha^2 h \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{(1-\alpha h)^{k+1}} \|y\|$.

Справедливо, что $\alpha^2 h \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{(1-\alpha h)^{k+1}} \|y\| = h^{-1} \left[\frac{1}{(1-\alpha h)^n} - n\alpha h - 1 \right] \|y\|$.

Следовательно, $\|\eta_n\| \le h^{-1} \left[\frac{1}{(1-\alpha h)^n} - n\alpha h - 1 \right] \|y\|$.

Запишем теперь общую оценку погрешности метода (3) с учётом неточности в правой части уравнения (1) и погрешности в операторе

$$\|x - u_{n,\delta}\| \le \|x - x_n\| + \|x_n - x_{n,\delta}\| + \|x_{n,\delta} - u_{n,\delta}\| \le$$
$$\le s^s (2n\alpha)^{-s} \|z\| + n\alpha\delta + h^{-1} \left[\frac{1}{(1-\alpha h)^n} - n\alpha h - 1 \right] \|y_\delta\|.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Люстерник, Л. А. Элементы функционального анализа / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. – М. : Наука, 1965. – 520 с.