О РЕШЕНИИ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА В НЕКОРРЕКТНОМ СЛУЧАЕ

Данилевич Ирина Викторовна

Преподаватель кафедры прикладной математики и информатики
УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина"

Научный руководитель: заведующий кафедрой прикладной математики и информатики УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина", кандидат физико-математических наук, доцент *Матысик О.В.*

При приближенном решении задач физики, техники и экономики весьма существенным является вопрос о корректности решаемой задачи. Многие некорректно поставленные задачи могут быть описаны уравнением первого рода [1]:

$$Ax = y,\ \ x \in X,\ \ y \in Y, \tag{1}$$

в котором по заданному, не обязательно линейному, оператору A, действующему из пространства X в пространство Y, и по заданному элементу $y \in Y$ требуется найти решение x в пространстве X.

<u>Определение 1.</u> *Задача определения решения* $x = R(y)$ *из пространства* X *по исходным данным* $y \in Y$ называется <u>*устойчивой на пространствах* X *и* Y</u>, *если для любого числа* $\varepsilon > 0$ *можно указать такое число* $\delta(\varepsilon) > 0$, *что из неравенства* $\rho_Y(y_1, y_2) \le \delta(\varepsilon)$ *следует, что*

$$\rho_x(x_1, x_2) \le \varepsilon,\ \text{где}\ x_1 = Ry_1,\ x_2 = Ry_2,\ x_1, x_2 \in X,\ y_1, y_2 \in Y.$$

По-другому, если бесконечно малым вариациям правой части y соответствуют бесконечно малые вариации x. Помимо этого, говорят вместо устойчивости x в пространстве X о непрерывной зависимости x от $y \in Y$.

<u>Определение 2.</u> *Следуя Ж.Адамару, задачу отыскания* $x \in X$ *из уравнения* (1) *называют* <u>*корректной*</u> (<u>*корректно поставленной*</u>), *если при любой фиксированной правой части* $y = y_0$ *из* Y *ее решение*:

а) *существует в пространстве* X;

б) *единственно в* X;

в) *устойчиво в* X.

Если хотя бы одно из условий не выполняется, то задачу называют *некорректной* (*некорректно поставленной*).

Рассмотрим некорректную задачу на примере решения интегрального уравнения Фредгольма I рода [2]

$$\int_0^1 A(t,s)x(s)ds = y(t). \qquad (2)$$

Пусть $X = Y = L_2(0,1)$, вещественное ядро $A(t,s)$ не только квадратично суммируемо, но и непрерывно. Такое ядро, очевидно, преобразует любую функцию $x(t)\in L_2(0,1)$ в непрерывную функцию и, следовательно, не для всякой правой части $y(t)\in L_2(0,1)$ решение уравнения (2) существует в пространстве $L_2(0,1)$.

Если $\lambda = 0$ – собственное значение оператора, т. е. ядро $A(t,s)$ неполное, то решение, в случае его существования, не единственно в $L_2(0,1)$.

Наконец, неустойчивость решения покажем для полного симметрического ядра. Пусть вещественные λ_i и $z_i(t)$, i =1,2,... – собственные числа и соответствующие им ортонормированные функции ядра. Тогда, как известно из теории интегральных уравнений, $\lambda_i \neq 0$ и $\lambda_i \to 0, i \to \infty$, а решение выражается через правую часть уравнения, представленную в виде:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i z_i(t), \quad y_i = (y, z_i) = \int_0^1 y(t) z_i(t) dt,$$

с помощью ряда

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i}{\lambda_i} z_i(t).$$

Если правые части $y^n(t)$, $n = 1, 2,...$ сходятся к функции $y(t)$ в пространстве $L_2(0,1)$, т. е. $\left\| y^n - y \right\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (y_i^n - y_i)^2 \to 0, n \to \infty$, то норма разности соответствующих решений уравнения (2), выраженная равенством

$$\left\| x^n - x \right\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(y_i^n - y_i)^2}{\lambda_i^2}.$$

не только не обязана стремиться к нулю, но и может быть бесконечно большой. В этом легко убедиться, положив $y^n(t) = y(t) + \sqrt{|\lambda_n|} \cdot z_n(t)$.

Хотя $\left\| y^n - y \right\|^2 = |\lambda_n| \to 0, n \to \infty$, тем не менее,

$$\left\| x^n - x \right\|^2 = \frac{1}{|\lambda_n|} \to \infty, n \to \infty$$

и, следовательно, устойчивость решений отсутствует.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матысик, О. В. Итерационная регуляризация некорректных задач / О. В. Матысик. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 188 с.

2. Савчук, В.Ф. Методы решения некорректных задач / В.Ф. Савчук, О.В. Матысик // Электронный учебно-методический комплекс для студентов стационара, Брест, объем – 2,2 Мб, 1 файл, 220 с., 13,5 п.л., 2012 (при обязательной регистрации в университете – свидетельство № 8/2012 от 03.10.2012).