Регуляризация некорректных задач в ослабленной норме гильбертова пространства

Хоменя Виталий Витальевич

Студент 4 курса физико-математического факультета УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина"

Научный руководитель: заведующий кафедрой прикладной математики и информатики УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина", кандидат физико-математических наук, доцент *Матысик О.В.*

Для решения в действительном гильбертовом пространстве линейного некорректного уравнения первого рода

$$Ax = y_\delta, \qquad (1)$$

где $\| y - y_\delta \| \le \delta$, A — положительный ограниченный самосопряженный оператор (0 не является его собственным значением, но $0 \in SpA$, т.е. рассматриваемая задача некорректна) используем метод

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} - \alpha A(Ax_{n,\delta} - y_\delta), \; x_{0,\delta} = 0. \qquad (2)$$

Рассмотрим поведение приближений (2) в энергетической норме $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$. Использование энергетической нормы позволяет получить оценки погрешности метода (2) без знания дополнительной информации на гладкость точного решения уравнения (1).

Теорема 1. *Итеративный метод* (2) *при условии* $0 < \alpha \le \dfrac{5}{4\|A\|^2}$ *сходится в энергетической норме, если число итераций* n *выбирать так, чтобы* $\sqrt[4]{n}\,\delta \to 0$, $n \to \infty$, $\delta \to 0$.

Теорема 2. *Априорная оценка погрешности для метода* (2) *при условии* $0 < \alpha \le \dfrac{5}{4\|A\|^2}$ *имеет вид* $\|x - x_{n,\delta}\|_A \le 2n^{1/4}\alpha^{1/4}\delta + (4n\alpha e)^{-1/4}\|x\|$, $n \ge 2$. *Оптимальная оценка погрешности имеет вид* $\|x - x_{n,\delta}\|_A^{\text{опт}} \le 2^{5/4} e^{-1/8} \delta^{1/2} \|x\|^{1/2}$, $n \ge 2$ *и достигается при априорном моменте останова* $n_{\text{опт}} = 2^{-3}\alpha^{-1}e^{-1/2}\|x\|^2\delta^{-2}$.

Очевидно, что для уменьшения количества итераций для достижения заданной точности следует брать α возможно большим из условия $0 < \alpha \le \dfrac{5}{4\|A\|^2}$, и так, чтобы $n_{\text{опт}} \in Z$.

Условия, когда из сходимости в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства H, дает

Теорема 3. *Если выполнены условия* 1) $E_\varepsilon x_{n,\delta}=0,$ 2) $E_\varepsilon x=0,$ *где* $E_\varepsilon=\int\limits_0^\varepsilon dE_\lambda,$ ε – *фиксированное положительное число* $(0<\varepsilon<\|A\|)$, *то из сходимости* $x_{n,\delta}$ *к* x *в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства.*

Доказательство.

Так как по условию теоремы 3 $E_\varepsilon x_{n,\delta}=0$ и $E_\varepsilon x=0,$ то $E_\varepsilon(x_{n,\delta}-x)=0$ и $\left(E_\varepsilon(x_{n,\delta}-x), x_{n,\delta}-x\right)=0$, т. е. $\int\limits_0^\varepsilon d(E_\lambda\,(x_{n,\delta}-x), x_{n,\delta}-x)=0$. Следовательно, $\int\limits_0^\varepsilon \frac{1}{\lambda}d(E_\lambda\,(x_{n,\delta}-x), A(x_{n,\delta}-x))=0$. Тогда получим, что

$$\|x_{n,\delta}-x\|^2=\int\limits_0^M \frac{1}{\lambda}d(E_\lambda\,(x_{n,\delta}-x), A(x_{n,\delta}-x))=$$

$$=\int\limits_0^\varepsilon \frac{1}{\lambda}\,d(E_\lambda\,(x_{n,\delta}-x), A(x_{n,\delta}-x))+\int\limits_\varepsilon^M \frac{1}{\lambda}\,d(E_\lambda\,(x_{n,\delta}-x), A(x_{n,\delta}-x))=$$

$$=\int\limits_\varepsilon^M \frac{1}{\lambda}\,d(E_\lambda\,(x_{n,\delta}-x), A(x_{n,\delta}-x))\le\frac{1}{\varepsilon}\|x_{n,\delta}-x\|_A^2.$$

Теорема 3 доказана.

Замечание. *Так как* [1] $x_{n,\delta}=A^{-1}\left[E-\left(E-\alpha A^2\right)^n\right]y_\delta,$ *то для того, чтобы* $x_{n,\delta}$ *удовлетворяло условию* $E_\varepsilon x_{n,\delta}=0$, *достаточно потребовать, чтобы* $E_\varepsilon y_\delta=0$. *Таким образом, если* $E_\varepsilon x=0$ *и* $E_\varepsilon y_\delta=0$, *то из сходимости метода итераций* (2) *в энергетической норме следует его сходимость в обычной норме пространства* H.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матысик, О. В. Явные и неявные итерационные процедуры решения некорректно поставленных задач / О. В. Матысик. – Брест: Брест. гос. ун-т, 2014. – 213 с.