Получение оценки погрешности в неявном методе итераций решения линейных уравнений с неотрицательным оператором

Лесик Антон Васильевич

Студент 3 курса физико-математического факультета УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина"

Научный руководитель: доцент кафедры прикладной математики и информатики УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина", кандидат физико-математических наук, доцент *Савчук В.Ф.*

В гильбертовом пространстве H для решения уравнения I рода

$$Ax = y_\delta, \tag{1}$$

где $\|y - y_\delta\| \le \delta$ и A – неограниченный линейный самосопряженный оператор предлагается использовать итерационный метод

$$x_{n+1,\delta} = (A^2 + B)^{-1}\big(Bx_{n,\delta} + Ay_\delta\big),\ x_{0,\delta} = 0. \tag{2}$$

Здесь $B = bE,\ b > 0,\ E$ – тождественный оператор. Предполагаем, что нуль не является собственным значением оператора A, но нуль принадлежит спектру оператора A и, следовательно, задача (1) некорректна. Пусть при точной правой части y уравнение (1) имеет точное решение x. В [1] доказаны теоремы.

<u>Теорема 1.</u> При условии $b > 0$ итерационный метод (2) сходится в исходной норме гильбертова пространства, если выбрать число итераций n в зависимости от уровня погрешности δ так, чтобы $\sqrt{n}\delta \to 0$, $n \to \infty, \delta \to 0$.

<u>Теорема 2.</u> Если точное решение x уравнение (1) истокопредставимо, т.е. $x = A^{2s}z,\ s > 0$, то при условии $b > 0$ для метода (2) справедлива оценка погрешности

$$\|x - x_{n,\delta}\| \le \left(\frac{bs}{2n}\right)\|z\| + \sqrt{\frac{n}{2b}}\delta,\ n > 2s.$$

Её оптимальная по n оценка имеет вид

$$\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}} \le [(1 + 2s)2^{-4s}s^{-s}\|z\|\delta^{-2}]^{\frac{1}{2s+1}}$$

и получается при

$$n_{\text{опт}} = \left[2^{3-2s}s^{2(s+1)}b^{2s+1}\|z\|^2\delta^{-2}\right]^{\frac{1}{2s+1}}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Савчук, В. Ф. Регуляризация операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В. Ф, Савчук, О. В. Матысик. – Брест: Брест. гос. ун-т. – 2008. – 196 с.