Аппроксимация производной Фреше дифференциального оператора

Матузко Дмитрий Александрович

Научный руководитель: Морозов В.В., старший преподаватель кафедры прикладной математики и информатики
УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина"

Построим линейный оператор ${}^{z}\boldsymbol{P_D}$, являющийся с точностью $\boldsymbol{\varepsilon = 10^{-10}}$ аналогом оператора дифференцирования сеточных функций из $\mathcal{R}^{n+1}$ при $\boldsymbol{n = 5}$. Искомый оператор находится по формуле [1, с. 128]

$$ {}^{z}\boldsymbol{P_D} = {}^{z}\boldsymbol{W}\,{}^{z}\boldsymbol{D}\,{}^{z}\boldsymbol{W}^{-1}, \tag{1} $$

где ${}^{z}\boldsymbol{W}$ – матрица Вандермонда на сетке отрезка $\boldsymbol{[a, b]}$.

Например, для сеточных аналогов многочленов из $\mathcal{P}^{n}{}_{[a,\,b]}$ на равномерной сетке матрица ${}^{z}\boldsymbol{P_D}$ примет вид

-11,4166666667	25,000000000	-25,000000000	16,6666666667	-6,2500000000	1,0000000000
-1,0000000000	-5,4166666667	10,000000000	-5,0000000000	1,6666666667	-0,2500000000
0,2500000000	-2,5000000000	-1,6666666667	5,0000000000	-1,2500000000	0,1666666667
-0,1666666667	1,2500000000	-5,0000000000	1,6666666667	2,5000000000	-0,2500000000
0,2500000000	-1,6666666667	5,0000000000	-10,000000000	5,4166666667	1,0000000000
-1,0000000000	6,2500000000	-16,6666666667	25,000000000	-25,00000000	11,4166666667

Эту же матрицу можно построить полиномиальным методом, используя свойство дифференциала Фреше линейного оператора $\boldsymbol{A : \mathcal{P}^{n} \rightarrow \mathcal{P}^{n-1}}$

$$ \boldsymbol{A\,{}^{n}\hbar(x) = \frac{d}{dx}({}^{n}\hbar(x))}. \tag{2} $$

Вычислив производную многочлена ${}^{n}\boldsymbol{\hbar(x)} \in \mathcal{P}^{n}_{[a,\,b]}$ по формуле второго порядка точности

$$ {}^{n}\boldsymbol{\hbar'(x) \approx \frac{ZM(x+\delta,K\hbar)-ZM(x-\delta,K\hbar)}{2\delta},\ \delta = 10^{4}\varepsilon}, \tag{3} $$

где функция $\boldsymbol{ZM(x,Kh)}$ находит значение многочлена ${}^{n}\boldsymbol{h(t)}$ в точке $\boldsymbol{x}$, получим погрешность аппроксимации (2) для $\boldsymbol{\|\hbar(x)\| \leq 1}$ порядка $\boldsymbol{\varepsilon/10}$.

В учебнике [2, с. 236] доказано, что интегральный оператор сеточных функций из $\mathcal{R}^{n}$ ($\boldsymbol{n = 5}$), $\boldsymbol{a = 0, b = 1}$ с $\boldsymbol{const = 0}$

$$ \boldsymbol{B\,u(x) = \int_a^x u(t)dt}, \text{ где } \boldsymbol{B : \mathcal{P}^{n-1}_{[a,b]} \rightarrow \mathcal{P}^{n}_{[a,\,b]}} \tag{4} $$

является правым обратным к оператору дифференцирования (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Морозов, В.В. Прикладной анализ и программирование : пособие / В.В. Морозов. – Брест : БрГУ, 2012. – 246 с.
2. Антоневич, А.Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения / А.Б. Антоневич, Я.В. Радыно. – Минск : БГУ, 2006. – 430 с.