Аппроксимация производной Фреше интегрального оператора

Матузко Дмитрий Александрович

Научный руководитель: Морозов В.В.,
старший преподаватель кафедры прикладной математики и информатики
УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина"

Опишем алгоритм полиномиального построения квадратной матрицы ${}^{z}\boldsymbol{P}_{Y}$, $z = n + 1$, являющейся с точностью $\varepsilon = 10^{-10}$ аналогом оператора интегрирования сеточных функций из $\mathcal{R}^{n}$ ($n = 5$), $a = 0$, $b = 1$ с $const = 0$

$$B\,u(x) = \int_{a}^{x} u(t)dt\text{, где } B : \mathcal{P}^{n-1}_{[a,b]} \to \mathcal{P}^{n}_{[a,\,b]} \tag{1}$$

Линейный дифференциал функционального оператора B равен

$$B\,{}^{n-1}\hbar(x) = \int_{a}^{x} {}^{n\text{-}1}\hbar(t)dt\,. \tag{2}$$

Дифференциал линейного оператора не зависит от точки приложения, поэтому элементы матрицы ${}^{z}\boldsymbol{P}_{Y}$ будем рассчитывать по (2) для ${}^{n-1}u(x) \equiv 0$.

Определенный интеграл с переменным верхним пределом от многочлена ${}^{n-1}\hbar(x) \in \mathcal{P}^{n-1}$ найдем по формуле Симпсона [1, с. 70], позволяющей с шагом $h = 10^{-3}$ получить погрешность вычислений ${}^{z}\boldsymbol{P}_{Y}$ при $\|\hbar(x)\| \le 1$ порядка $\varepsilon/10$. Построенный полиномиальным методом оператор ${}^{6}\boldsymbol{P}_{Y}$ имеет вид

0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000
0,0662500000	0,1968055556	-0,1080555556	0,0641666667	-0,0226388889	0,0034722222
0,0800000000	0,1977777778	0,2088888889	-0,1466666667	0,0755555556	-0,0155555556
0,2662500000	-0,7387500000	2,1675000000	-1,8825000000	0,9862500000	-0,1987500000
1,2000000000	-5,4044444444	11,4844444444	-11,093333333	5,7511111111	-1,1377777778
4,4062500000	-21,440977778	43,5763888889	-43,229167500	21,9618055556	-4,2743055556

Подействовав этим оператором на сеточный аналог ${}^{5}U$ многочлена ${}^{4}u(x) \in \mathcal{P}^{4}$, получим сеточное приближение ${}^{6}V$ его первообразной ${}^{5}v(x) \in \mathcal{P}^{5}$ с $const = 0$. Оператор интегрирования многочленов из множества $\mathcal{P}^{n-1}$ можно построить также с помощью матрицы Вандермонда

$${}^{z}\boldsymbol{P}_{Y} = {}^{z}\boldsymbol{W}\,{}^{z}\boldsymbol{Y}\,{}^{z}\boldsymbol{W}^{-1}\text{, где } {}^{z}\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \dots & 0 & 0 \\ & . & . & . & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1/n & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Это говорит о существовании целого класса матриц, представляющих оператор интегрирования в различных базисах множества $\mathcal{P}^{n}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Морозов, В.В. Прикладной анализ и программирование : пособие / В.В. Морозов. – Брест : БрГУ, 2012. – 246 с.