Сходимость в энергетической норме неявного итерационного метода решения некорректных задач с неограниченным оператором

Мелешкевич Юрий Викторович

Студент 2 курса физико-математического факультета УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина"

Научный руководитель: доцент кафедры прикладной математики и информатики УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина", кандидат физико-математических наук, доцент *Савчук В.Ф.*

В гильбертовом пространстве H для решения уравнения I рода

$$Ax = y_\delta, \tag{1}$$

где $\|y - y_\delta\| \le \delta$ и A – неограниченный линейный самосопряженный оператор (нуль принадлежит спектру оператора A, но не является собственным значением) используется неявный итерационный метод

$$(A^2 + B)x_{n+1,\delta} = Bx_{n,\delta} + Ay_\delta,\ x_{0,\delta} = 0,\quad b > 0. \tag{2}$$

Здесь E – тождественный оператор.

Доказана сходимость метода (2) в энергетической норме $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$ гильбертова пространства. Использование энергетической нормы позволяет получить априорные оценки погрешности метода (2) и априорный момент останова $n_{опт}$, не требуя истокопредставимости точного решения x уравнения $Ax = y$.

Доказаны теоремы.

Теорема 1. При условии $b > 0$ метод (2) сходится в энергетической норме гильбертова пространства, если число итераций n выбрать из условия $n^{1/4}\delta \to 0,\ n \to \infty,\ \delta \to 0.$ Для метода (2) справедлива оценка погрешности

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A \le \left(\frac{b}{4n}\right)^{1/4}\|x\| + \left(\frac{n}{2b}\right)^{1/4}\delta,\quad n \ge 1.$$

Теорема 2. При условии $b > 0$ оптимальная оценка погрешности метода (2) в энергетической норме имеет вид

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A^{опт} \le 2^{5/8}\delta^{1/2}\|x\|^{1/2}$$

и получается при

$$n_{опт} = 2^{-1/2}b\delta^{-2}\|x\|.$$