О СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С НОРМАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Михайлов Артём Викторович

Преподаватель кафедры прикладной математики и информатики УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина"

Пусть X – банахово пространство. В работе [1] для уравнения

$$x = Bx + f\,, \tag{1}$$

были описаны условия, при которых последовательные приближения

$$x_{n+1} = Bx_n + f \quad (x_0 \in X,\, n = 1,2,\ldots) \tag{2}$$

сходятся к одному из решений уравнения (1). В работах [2,3] было уточнено к какому из решений уравнения (1) сходятся последовательные приближения (2) и, более того, показано, что приближенные последовательные приближения

$$\tilde{x}_{n+1} = B\tilde{x}_n + f_n \tag{3}$$

($f_n = f + e_n$, e_n – ошибка на n-ом шаге при вычислении последовательных приближений, $\|e_n\| < \delta$, δ – фиксированное число) связаны с точными последовательными приближениями (2) неравенствами

$$\|\tilde{x}_n - x_*\| \le \|\tilde{x}_n - x_n\| + \|x_n - x_0\| \le \mu_n + n\delta \quad (n = 0,1,2,\ldots), \tag{4}$$

где (μ_n) – сходящаяся к нулю последовательность, зависящая, естественно, от начального приближения x_0. Элементы последовательности $(\mu_n + n\delta)$ при увеличении номера n сначала уменьшается, а потом увеличивается. Поэтому приближенные последовательные приближения (3) вначале приближаются к точному решению, а затем начинают от него удаляться. Более того, оказывается, что при уменьшении δ близость этих приближений к точному решению стремится к нулю при $\delta \to 0$. Описанный факт часто записывается в виде равенства

$$\lim_{n\to\infty,\, n\delta\to 0} \|\tilde{x}_n - x_*\| = 0, \tag{5}$$

или в виде равенства

$$\lim_{\delta\to 0} \inf_{\eta\to\infty} \|\tilde{x}_n - x_*\| = 0 \quad (0 \le \eta < \infty). \tag{6}$$

При выполнении соотношений (5) и (6) говорят, что приближённый итерационный метод (3) квазисходится к точному решению.

Оказывается, что аналогичные утверждения справедливы и для уравнений с нормальными операторами.

Теорема 1. *Пусть B – нормальный оператор с $\rho(B) = 1$ в гильбертовом пространстве X, и пусть $Fix\ B^*B = Fix\ B$. Пусть уравнение (1) разре-*

шимо. Тогда последовательные приближения (2) при любом начальном условии $x_0 \in X$ *сходятся к одному из решений уравнения (1).*

Более точно, приближения (2) сходятся к решению x_* *уравнения (1), для которого* $Px_* = Px_0$ *(*P *– ортопроектор на подпространство собственных векторов оператора* B*, удовлетворяющего собственному значению* 1*).*

Если уравнение (1) не имеет решений, то невязки последовательных приближений (2) сходятся к нулю.

Для истокообразных правых частей, в условии теоремы 1, можно установить скорость сходимости. Легко установить и условие сходимости последовательных приближений в более слабых нормах, чем исходная.

Теорема 2. *Пусть* B *– нормальный оператор в гильбертовом пространстве* X, $\rho(B) = 1$, *и пусть* $\mathrm{Fix}\, B^* B = \mathrm{Fix}\, B$. *Пусть уравнение (1) разрешимо. Тогда «приближенные» последовательные приближения (3) квазисходятся к точному решению* x_*, *для которого* $Px_* = Px_0$*; иными словами для этих «приближенных» последовательных приближений справедливы равенства (5) и (6).*

Полученные результаты могут быть перенесены на операторные уравнения первого рода.

Аналогичные теореме 2 утверждения верны и в случае, когда $\|e_n\| < \delta_n$, где последовательность (δ_n) с той или иной скоростью стремится к нулю. При этом последовательность $(\mu_n + n\delta)$, заменяется последовательностью $(\mu_n + \sigma_n \|(\delta_n)\|)$; здесь $\|\cdot\|$ – некоторая норма последовательности, а σ_n – двойственные нормы элементов $(\underbrace{1,1,\ldots 1}_{n},0,0,\ldots)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я. Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, Главная редакция физ.-матем. литературы. 1969. С. 455.
2. Забрейко П.П., Матысик О.В. // Теорема М.А. Красносельского и некорректные линейные задачи с самосопряжённым оператором. Докл. НАН Бел. 2014. Т. 58, № 5. С. 12-17.
3. Забрейко П.П., Матысик О.В. // Теорема М.А. Красносельского и итерационные процедуры решения некорректных задач с самосопряжёнными операторами. Докл. НАН Беларуси. 2014. Т. 58, № 6. С. 9-14.
4. Забрейко, П.П. Об обобщении теоремы М.А. Красносельского на несамосопряжённые операторы / П.П. Забрейко, А.В. Михайлов. // Доклады НАН Беларуси, том 58, математика. – 2014. – № 2. – С. 16–21.
5. Забрейко П.П., Михайлов А.В. Сходимость последовательных приближений для уравнений с нормальными операторами // Докл. НАН Беларуси. 2015. Т. 00, №. 0. С. 5-10.