Сходимость в гильбертовом пространстве явного двухшагового метода решения некорректных задач с апостериорным выбором числа итераций

Минзер Екатерина Ивановна

Магистрант физико-математического факультета УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина"

Научный руководитель: заведующий кафедрой прикладной математики и информатики УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина", кандидат физико-математических наук, доцент *Матысик О.В.*

В гильбертовом пространстве H решается операторное уравнение первого рода $Ax = y_\delta$, где A – ограниченный, положительный, самосопряженный оператор, для которого нуль не является собственным значением. Пусть $0 \in SpA$, тогда рассматриваемая задача некорректна. Здесь $\|y - y_\delta\| \le \delta$. Предположим, что при точной правой части y существует единственное решение x операторного уравнения. Для его отыскания применим явный двухшаговый метод итераций

$$x_{n,\delta} = 2(E - \alpha A)x_{n-1,\delta} - (E - \alpha A)^2 x_{n-2,\delta} + \alpha^2 A y_\delta,\ x_{0,\delta} = x_{1,\delta} = 0. \quad (1)$$

Здесь E – тождественный оператор, α – итерационный параметр. Ниже, под сходимостью метода (1) понимается утверждение о том, что приближения (1) сколь угодно близко подходят к точному решению уравнения $Ax = y_\delta$ при подходящем выборе n и достаточно малых δ.

Метод можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по невязке, аналогичным [1–2]. Зададим уровень останова $\varepsilon > 0$ и определим момент m останова условиями

$$\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon,\ (n < m),\quad \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \le \varepsilon,\ \ \varepsilon = b\delta,\ b > 1. \quad (2)$$

Предполагается, что при начальном приближении $x_{0,\delta}$ невязка достаточно велика, больше уровня останова ε, т. е. $\|Ax_{0,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$. Ниже метод итерации (1) с правилом останова (2) является сходящимся, если $\lim\limits_{\delta \to 0}\left(\inf\limits_{m}\|x - x_{m,\delta}\|\right) = 0$. Покажем, что правило останова по невязке (2) применимо к методу (1).

Рассмотрим семейство функций

$$g_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - (1 - \alpha\lambda)^n - n\alpha\lambda(1 - \alpha\lambda)^{n-1}\right].$$

Нетрудно показать, что для $g_n(\lambda)$ выполняются условия:

$$\sup_{0\le\lambda\le M}|g_n(\lambda)|\le\frac{5}{4}(n-1)\alpha,\quad n\ge1,\ M=\|A\|,\ 0<\alpha\le\frac{5}{4M},$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M}|1-\lambda g_n(\lambda)|\le 2,\ 0<\alpha\le\frac{5}{4M},$$

$$1-\lambda g_n(\lambda)\to 0,\ n\to\infty,\ \forall\lambda\in(0,M],\ 0<\alpha<2/M,$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M}\lambda^s|1-\lambda g_n(\lambda)|\le(s+2)\left(\frac{s}{\alpha e}\right)^s(n-1)^{-s},\ n\ge1,\ 0\le s<\infty,\ 0<\alpha\le\frac{5}{4M}.$$

Справедливы

Лемма 1. *Пусть* $A=A^*\ge0$, $\|A\|\le M$. *Тогда для* $\forall w\in H$ $(E-Ag_n(A))w\to0,\ n\to\infty$.

Лемма 2. *Пусть* $A=A^*\ge0$, $\|A\|\le M$. *Тогда* $\forall v\in\overline{R(A)}$ *имеет место соотношение* $(n-1)^s\left\|A^s(E-Ag_n(A))v\right\|\to0$, $n\to\infty$, $0\le s<\infty$.

Лемма 3. *Пусть* $A=A^*\ge0$, $\|A\|\le M$. *Если для некоторого* $n_k<\overline{n}=const$ *и* $v_0\in\overline{R(A)}$ *при* $k\to\infty$ *имеем* $\omega_k=A(E-Ag_{n_k}(A))v_0\to0$, *то* $v_k=(E-Ag_{n_k}(A))v_0\to0$.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $A=A^*\ge0$, $\|A\|\le M$ *и пусть момент останова* $m=m(\delta)$ *в методе* (1) *выбирается по правилу* (2). *Тогда* $x_{m(\delta),\delta}\to x$ *при* $\delta\to0$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и пусть* $x=A^sz,\ s>0$. *Тогда справедливы оценки* $m(\delta)\le2+\frac{s+1}{\alpha e}\left[\frac{(s+3)\|z\|}{(b-2)\delta}\right]^{1/(s+1)}$,

$$\|x_{m(\delta),\delta}-x\|\le2^{1/(s+1)}[(b+2)\delta]^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}+$$
$$+\frac{5}{4}\alpha\left\{1+\frac{s+1}{\alpha e}\left[\frac{(s+3)\|z\|}{(b-2)\delta}\right]^{1/(s+1)}\right\}\delta. \quad (3)$$

Доказательство лемм 1–3 и теорем 1–2 аналогично доказательству подобных из [1–2].

Замечание 1. *Порядок оценки* (3) *есть* $O\left(\delta^{\frac{s}{s+1}}\right)$ *и, как следует из* [2], *он оптимален в классе задач с истокопредставимыми решениями.*

Замечание 2. *Используемое в формулировке теоремы* 2 *предположение порядка* $s > 0$ *истокопредставимости точного решения не потребуется на практике, так как оно не содержится в правиле останова* (2). *И тем не менее, в теореме* 2 *утверждается, что будет автоматически выбрано количество итераций* m, *обеспечивающих оптимальный порядок погрешности. Но даже, если истокопредставимость точного решения отсутствует, останов по невязке* (2), *как показывает теорема* 1, *обеспечивает сходимость итерационного метода, т. е. его регуляризующие свойства.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матысик, О. В. Итерационная регуляризация некорректных задач / О. В. Матысик. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 188 с.

2. Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г. М. Вайникко, А. Ю. Веретенников. – М.: Наука, 1986. – 178 с.