Метрический анализ вписанных и описанных окружностей Аполлония

Морозов Владислав Владимирович

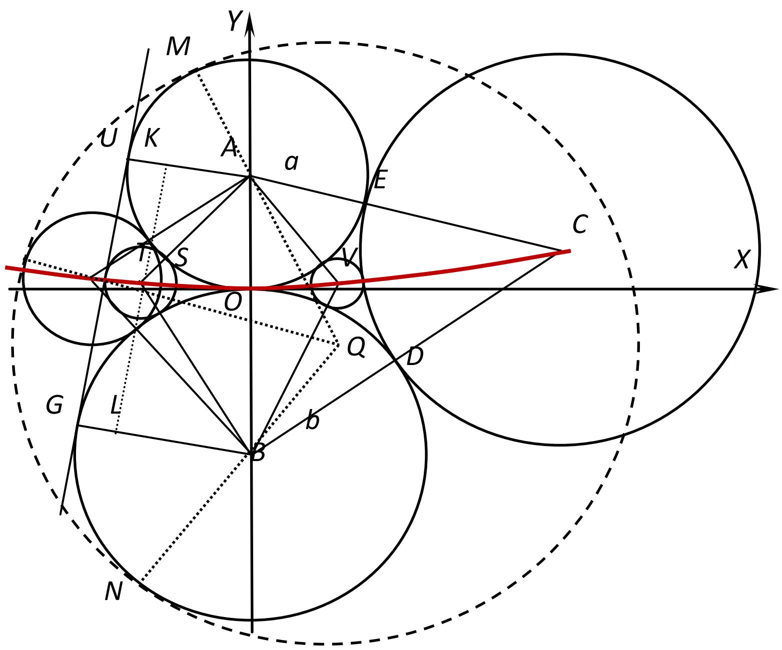
Научный руководитель: Морозов В.В., старший преподаватель
кафедры прикладной математики и информатики
УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина"

Цель исследования: разработать математическую модель взаимодействия зубчатого вала, параллельно расположенных шестерен, окаймляющего барабана и конвейерной платформы, если проекции вала, шестерен, барабана и платформы на плоскость перпендикулярную осям вращения попарно касаются в проективной плоскости.

Фигуру, образованную тремя попарно соприкасающимися дугами, и ее внутреннюю область назовем *треарком* (три арки). Треарк, образованный вогнутыми вовнутрь дугами, будем называть *вогнутым*, а выпуклыми изнутри дугами – *выпуклым*.

Рассмотрим три варианта касания дуг окружностью Аполлония:

1. Вписанное касание окружностью соприкасающихся дуг.
2. Вневписанное касание окружностью соприкасающихся дуг.
3. Описанное касание окружностью соприкасающихся дуг.



Вписанное и вневписанное касание окружностью дуг треарка происходит, если окружность и каждая дуга треарка попарно лежат в разных полуплоскостях относительно их общей касательной. На рисунке вписанное в вогнутый треарк DEO касание осуществляет окружность с центром V, а вневписанное касание дуг выпуклого треарка с центрами дуг V, A, B выполняет окружность с центром C.

Описанное касание окружностью дуг выпуклого треарка происходит, если окружность и каждая дуга треарка попарно лежат в одной полуплоскости относительно их общей касательной. Описанное около выпуклого треарка с центрами дуг A, B, T касание выполняет окружность, изображенная штриховой линией, с центром в точке Q.

Окружность с центром T осуществляет смешанное касание с дугами одновыпуклого треарка OMN. Рассмотрим задачу построения вписанной в криволинейный треугольник окружности, касающейся двух окружностей с центрами A и B (радиусов a и b соответственно) и их общей касательной UG. Пусть радиус искомой окружности с центром S равен r_m, тогда на расстоянии r_m от общей касательной проведем параллельно ей пунктирный отрезок KL. По теореме Пифагора справедливы три уравнения:

$$KS^2 + (a - r_m)^2 = (a + r_m)^2,$$
$$LS^2 + (b - r_m)^2 = (b + r_m)^2,$$
$$LK^2 + (b - a)^2 = (a + b)^2,$$

из которых следует

$$r_m = \frac{ab}{\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2}.$$

Найдем радиус r вписанной в вогнутый треарк DEO окружности с центром V, полагая радиус $r_C = c$. Из теоремы косинусов вытекает система трех уравнений

$$\begin{cases} (a+b)^2 = (a+r)^2 + (b+r)^2 - 2(a+r)(b+r)\cos\alpha, \\ (a+c)^2 = (a+r)^2 + (c+r)^2 - 2(a+r)(c+r)\cos\beta, \\ (b+c)^2 = (b+r)^2 + (c+r)^2 - 2(b+r)(c+r)\cos(2\pi - (\alpha+\beta)), \end{cases}$$

которая после замены $\cos\alpha = u$, $\cos\beta = v$ сводится к уравнению четвертого порядка относительно r с одним положительным корнем

$$r = \frac{abc}{ab + ac + bc + 2\sqrt{abc(a+b+c)}}.$$

При $c \to \infty$ предельное положение вогнутого треарка OED станет симметричным относительно оси OY вырожденному треарку OUG, а радиус вписанной в него окружности будет равен

$$r_p = \lim_{c\to\infty} \frac{abc}{ab + ac + bc + 2\sqrt{abc(a+b+c)}} = \frac{ab}{a + b + 2\sqrt{ab}} = r_m.$$

Найдем радиус R описанной окружности около выпуклого треарка с центрами дуг A, B, T (радиус $r_T = c$) из системы уравнений относительно неизвестных R, α, β

$$\begin{cases}(a+b)^2 = (R-a)^2 + (R-b)^2 - 2(R-a)(R-b)\cos\alpha,\\ (a+c)^2 = (R-a)^2 + (R-c)^2 - 2(R-a)(R-c)\cos\beta,\\ (b+c)^2 = (R-b)^2 + (R-c)^2 - 2(R-b)(R-c)\cos(\alpha+\beta).\end{cases}$$

Решением системы при $c > \dfrac{ab}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$ является радиус окружности с центром в полуплоскости (UGO) равный

$$R = \frac{abc(ab+ac+bc+2\sqrt{abc(a+b+c)})}{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2-2abc(a+b+c)}.$$

Если $c < \dfrac{ab}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$, то радиус вневписанной окружности с центром в полуплоскости (UGT) находится по формуле

$$R = \frac{abc(ab+ac+bc+2\sqrt{abc(a+b+c)})}{2abc(a+b+c)-a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2}.$$

При $c = \dfrac{ab}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$ выражение $a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2-2abc(a+b+c)$ равно 0, то есть радиусы описанной и вневписанной окружностей в предельном положении дуги (как касательной к окружностям с центрами в A и B) стремятся к бесконечности.

Найдем уравнение биссектрисы OVC двуарка DOE, образованного двумя дугами с центрами A и B. Для разных радиусов ($b > a$) зависимость y от $x \geq 0$, где $(x,\ y)$ – любая точка биссектрисы, по определению равноудаленная от дуг окружностей, задается как

$$y = \frac{b-a}{2}\left(\sqrt{\frac{x^2+ab}{ab}}-1\right) \text{ или неявно } \frac{\left(y+\frac{b-a}{2}\right)^2}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2} - \frac{x^2}{(\sqrt{ab})^2} = 1,\ x \geq 0,\ y(0) = 0.$$

Уравнение полу-ветви гиперболы (ее эксцентриситет, фокальный радиус, уравнение асимптоты и т.д.) способствует аналитической расшифровке геометрических методов построения окружностей Аполлония. Доказаны признаки равенства треарков и формулы соотношений между линейными (радиусы дуг) и угловыми (радианная мера дуг) характеристиками. Например, если заданы радиусы (a и b) двух дуг вогнутого треарка и угол (γ) третьей дуги, то радиус третьей дуги треарка находится по формуле

$$c = \frac{2abctg^2(\gamma/2)}{a+b+\sqrt{(a+b)^2+4abctg^2(\gamma/2)}}.$$