Регуляризация некорректных задач при помощи неявного итерационного метода с использованием правила останова по соседним приближениям

Онищук Владислав Борисович

Студент 4 курса физико-математического факультета УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина"

Научный руководитель: доцент кафедры прикладной математики и информатики УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина", кандидат физико-математических наук, доцент *Савчук В.Ф.*

В гильбертовом пространстве H решается операторное уравнение

$$Ax = y_\delta, \tag{1}$$

где A – ограниченный положительный и несамосопряженный оператор, для которого нуль не является собственным значением оператора A, но нуль принадлежит его спектру, $\|y - y_\delta\| \le \delta$.

Предположим, что при точной правой части y уравнение (1) имеет единственное точное решение x. Будем искать его с помощью неявного итерационного метода

$$\begin{gathered} z_{n+1} = [E + \alpha(A^*A)^3)]^{-1}\{[E - \alpha(A^*A)^3]z_n + 2\alpha(A^*A)^2A^*y_\delta\} + \\ +[E + \alpha(A^*A)^3)]^{-1}[E - \alpha(A^*A)^3]u_n, z_0 \in H, \end{gathered} \tag{2}$$

где u_n – ошибки вычисления итераций, $\|u_n\| \le \beta$. Обозначим $C = [E + \alpha(A^*A)^3)]^{-1}[E - \alpha(A^*A)^3]$, $B = 2\alpha[E + \alpha(A^*A)^3)]^{-1}(A^*A)^2A^*$, тогда метод (2) запишется в виде

$$z_{n+1} = Cz_n + By_\delta + Cu_n.$$

Метод (2) становится эффективным и тогда, когда нет сведений об истокопредставимости точного решения x, если к методу (2) применить правило останова по соседним приближениям

$$\|z_{n+1} - z_n\| \ge \varepsilon, (n < m), \ \|z_{m+1} - z_n\| \le \varepsilon, \ \varepsilon > 0. \tag{3}$$

Теорема. Пусть уровень останова $\varepsilon = \varepsilon(\delta, \beta)$ выбирается как функция от уровней δ и β норм погрешностей $y - y_\delta$ и u_n. Тогда справедливы следующие утверждения:

а) если $\varepsilon(\delta, \beta) \ge 2\|C\|\beta$, то момент m останова определен при любом начальном приближении $z_0 \in H$ и любых y_δ и u_n, удовлетворяющих условиям $\|y - y_\delta\| \le \delta, \|u_n\| \le \beta$;

б) если $\varepsilon(\delta, \beta) \ge 2\|C\|\beta + \|B\|\delta$, то справедлива оценка

$$m \le \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta)(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)};$$

в) если, кроме того, $\varepsilon(\delta,\beta) \longrightarrow 0, \delta,\beta \longrightarrow 0$ и $\varepsilon(\delta,\beta) \geq d\,(\|B\|\delta + {} + \|C\|\beta^p)$, где $d > 1$, $p \in (0,1)$, то $\lim_{\delta,\,\beta\longrightarrow 0}\|z_m - x\| = 0$.