Решение задачи Коши с матрично-дифференциальным уравнением

Пантелеева Екатерина Васильевна

Доцент кафедры математического анализа, дифференциальных уравнений и их приложений УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина", кандидат физ.-мат. наук

Научный руководитель: доцент кафедры прикладной математики и информатики УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина", кандидат физ.-мат. наук, доцент А.П. Худяков

Пусть X – множество квадратных стационарных матриц фиксированного размера. Рассмотрим матричное уравнение, содержащее дифференциал Гато первого порядка матричной функции

$$\delta U[A;H]=F(U,A),\quad U(A_0)=U_0,\quad A,H\in X, \tag{1}$$

где $U(A)$ – функция матричного аргумента, F – некоторая, вообще говоря, нелинейная функция двух аргументов, $\delta U[A;H]$ – дифференциал Гато в точке A по направлению H, удовлетворяющее указанному начальному условию.

Для приближенного решения задачи Коши (1) используем формулу приближения дифференциала Гато функции матричного аргумента [1]. В нашем случае она примет вид

$$\delta U[A;H]=\delta\omega[A;H]\omega^{-1}(A_{n+1})\times$$

$$\times\left(U(A_{n+1})-\sum_{k=0}^{n}l_k(A_{n+1})(B_kA_{n+1}-\tilde{A}_k)\left[l_k(A_k)(B_kA_k-\tilde{A}_k)\right]^{-1}U(A_k)\right), \tag{2}$$

где $B_k=B_k(A)=\delta l_k[A;H]$, $\tilde{A}_k=\tilde{A}_k(A)=B_k(A)A+B_k^{-1}(A)l_k(A)B_k(A)H$. Здесь A_0, $A_1,\ldots,A_n$ – матрицы из X такие, что обратные матрицы в (2) существуют. Подставляя (2) в (1), получим

$$\delta\omega[A;H]\omega^{-1}(A_{n+1})\left(Y_{n+1}-\sum_{k=0}^{n}l_k(A_{n+1})(B_kA_{n+1}-\tilde{A}_k)\left[l_k(A_k)(B_kA_k-\tilde{A}_k)\right]^{-1}Y_k\right)=$$

$$=F(Y,A),\quad Y_0=U_0, \tag{3}$$

где $Y_0,Y_1,\ldots,Y_{n+1}$ – приближенное решение задачи (1) в матричных узлах $A_0,A_1,\ldots,A_{n+1}$. Если теперь в (3) вместо A подставить матричные узлы A_k $(k=1,2,\ldots,n+1)$, то получим систему (в общем случае нелинейных) матричных уравнений. Решая данную систему каким-либо прямым или итерационным методом, получим искомое приближенное решение задачи (1).

Пример. Пусть X – множество квадратных матриц размера 2. Рассмотрим задачу Коши для функции матричной переменной $U(A),\ A \in X$

$$\delta U[A;H] = 3U(A) + 2A, \quad U(A_0) = U_0, \tag{4}$$

где $A_0 = \begin{bmatrix} 0,312 & 0,467 \\ 0,457 & 0,02 \end{bmatrix}, \quad U_0 = \begin{bmatrix} 0,316 & 0,338 \\ 0,23 & 0,002 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0,021 & 0,43 \\ 0,405 & 0,223 \end{bmatrix}.$

Введем матричные узлы $A_1 = \begin{bmatrix} 0,11 & 0,032 \\ 0,223 & 0,155 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0,004 & 0,085 \\ 0,5 & 0,305 \end{bmatrix},$ $A_3 = \begin{bmatrix} 0,234 & 0,028 \\ 0,2 & 0,004 \end{bmatrix},\ A_4 = \begin{bmatrix} 0,051 & 0,291 \\ 0,176 & 0,498 \end{bmatrix}.$

Для приближенного решения задачи (1) используем формулу (3). Построим систему матричных уравнений. В данном случае она является линейной. Имеем $n = 3$,

$$Y_0 = U_0 = \begin{bmatrix} 0,316 & 0,338 \\ 0,23 & 0,002 \end{bmatrix}, \quad \delta\omega[A_i;H]\omega^{-1}(A_4)\times$$

$$\times\left(Y_4 - \sum_{k=0}^{n} l_k(A_4)\left(B_k(A_i)A_4 - \tilde{A}_k(A_i)\right)\left[l_k(A_k)(B_k(A_i)A_k - \tilde{A}_k(A_i))\right]^{-1} Y_k \right) =$$

$$= 3Y_i + 2A_i, \quad i = 1,2,3,4. \tag{5}$$

Приведем в численном виде с точностью до 3 значащих цифр систему матричных уравнений (5) для определения неизвестных Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4

$$Y_0 = \begin{bmatrix} 0,316 & 0,338 \\ 0,23 & 0,002 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -0,992 & -0,186 \\ -0,180 & -0,0380 \end{bmatrix} Y_0 + \begin{bmatrix} -292 & -302 \\ -47,5 & -51,9 \end{bmatrix} Y_1 + \begin{bmatrix} 0,142 & 4,05 \\ 0,268 & 6,00 \end{bmatrix} Y_2 +$$

$$+\begin{bmatrix} 2,49 & -15,5 \\ 2,00 & -12,3 \end{bmatrix} Y_3 + \begin{bmatrix} 3,33 & 4,20 \\ 0,815 & 0,606 \end{bmatrix} Y_4 = \begin{bmatrix} 0,22 & 0,064 \\ 0,446 & 0,31 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2,48 & 14,1 \\ -2,12 & -12,1 \end{bmatrix} Y_0 + \begin{bmatrix} -1368 & -2630 \\ 1190 & 2289 \end{bmatrix} Y_1 + \begin{bmatrix} -246 & -297 \\ 235 & 285 \end{bmatrix} Y_2 +$$

$$+ \begin{bmatrix} -50,8 & 6,08 \\ 52,1 & -6,20 \end{bmatrix} Y_3 + \begin{bmatrix} -8,96 & -14,4 \\ 7,56 & 12,5 \end{bmatrix} Y_4 = \begin{bmatrix} 0,008 & 0,17 \\ 1 & 0,61 \end{bmatrix}, \qquad (6)$$

$$\begin{bmatrix} 8,20 & -2,04 \\ 1,83 & -0,441 \end{bmatrix} Y_0 + \begin{bmatrix} -211 & -135 \\ -49,2 & -32,5 \end{bmatrix} Y_1 + \begin{bmatrix} 13,7 & 21,9 \\ 2,06 & 3,15 \end{bmatrix} Y_2 +$$

$$+ \begin{bmatrix} -10,2 & -34,7 \\ 1,20 & 8,53 \end{bmatrix} Y_3 + \begin{bmatrix} -7,12 & -12,0 \\ -1,92 & -2,75 \end{bmatrix} Y_4 = \begin{bmatrix} 0,468 & 0,056 \\ 0,4 & 0,008 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0,149 & 0,662 \\ -0,286 & -0,975 \end{bmatrix} Y_0 + \begin{bmatrix} 230 & 340 \\ -363 & -539 \end{bmatrix} Y_1 + \begin{bmatrix} 2,60 & 3,26 \\ -1,86 & -2,36 \end{bmatrix} Y_2 +$$

$$+ \begin{bmatrix} -0,991 & 0,424 \\ 0,727 & -0,138 \end{bmatrix} Y_3 + \begin{bmatrix} -14,4 & -15,6 \\ 15,9 & 21,2 \end{bmatrix} Y_4 = \begin{bmatrix} 0,102 & 0,582 \\ 0,352 & 0,996 \end{bmatrix}.$$

Систему матричных уравнений (6) можно записать поэлементно, получив при этом систему 20 линейных алгебраических уравнений относительно 20 неизвестных (элементов матриц Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4). Сразу исключая Y_0 из остальных матричных уравнений в (6), получим систему 16 линейных алгебраических уравнений, которую можно решить, например, методом Гаусса. По данному методу решение системы (6) имеет вид

$$Y_0 = \begin{bmatrix} 0,316 & 0,338 \\ 0,23 & 0,002 \end{bmatrix}, \quad Y_1 = \begin{bmatrix} 0,00221 & 0,00618 \\ -0,00177 & -0,00416 \end{bmatrix}, \quad Y_2 = \begin{bmatrix} -0,0393 & 0,00504 \\ 0,0264 & -0,0223 \end{bmatrix},$$

$$Y_3 = \begin{bmatrix} 0,133 & 0,132 \\ -0,0130 & -0,0395 \end{bmatrix}, \quad Y_4 = \begin{bmatrix} -0,171 & -0,546 \\ 0,148 & 0,455 \end{bmatrix}.$$

Полученное в матричных узлах решение задачи (4) можно восстановить используя формулу матричного интерполирования [2, с. 459] вида

$$L_{n0}(A) = \sum_{k=0}^{n} l_k(A) l_k^{-1}(A_k) F(A_k),$$

где, как и ранее, $l_k(A) = (A - A_0)\cdots(A - A_{k-1})(A - A_{k+1})\cdots(A - A_n)$ $(k = 0,1,\ldots,n)$, удовлетворяющую интерполяционным условиям $L_{n0}(A_k) = F(A_k)$ для $k = 0,1,\ldots,n$. В нашем случае $n = 4$, $F(A_k) = Y_k$ $(k = 0,1,2,3,4)$ и $U(A) \approx Y(A) = L_{4,0}(A)$.

Введем матрицы вида $\overline{A}_i = (A_{i-1} + A_i)/2$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ и определим в них нормы матриц-невязок между левой и правой частями матрично-дифференциального уравнения задачи (1). Дифференциал Гато $\delta Y[A; H] = \delta L_{4,0}[A; H]$ вычислим по известной [3] формуле

$$\delta Y[\overline{A}_i; H] = \lim_{\lambda \to 0} \frac{Y(\overline{A}_i + \lambda H) - Y(\overline{A}_i)}{\lambda}.$$

Обозначим через $R_i = \left\| \delta Y[\overline{A}_i; H] - 3Y(\overline{A}_i) - 2\overline{A}_i \right\|_2$ $i = 1, 2, 3, 4,$ где $\|\cdot\|_2$ – спектральная норма соответствующей матрицы [4]. В нашем случае данные нормы равны $R_1 = 0{,}699,$ $R_2 = 0{,}528,$ $R_3 = 0{,}959,$ $R_4 = 0{,}250.$ По результатам численного эксперимента видно, что невязка между левой и правой частями уравнения (1) невелика, однако точность приближения невысокая. Для получения более высокой точности решения необходимо привлекать большее количество узлов или использовать другие методы приближения матрично-дифференциального оператора.

Аналогичного типа приближенные методы решения матрично-дифференциальных уравнений могут быть получены на основе формул тригонометрического, экспоненциального и других типов матричного обобщенного интерполирования Эрмита–Биркгофа.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф16М-055).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Худяков, А.П. Приближение операторов, заданных на множествах функций и матриц, интерполяционными методами / А.П. Худяков, Е.В. Пантелеева // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии: материалы Междунар. науч.-практ. конф., Брест, 19–20 окт. 2017 г. / Брест. гос. ун-т. – Брест, 2017. – С. 48–49.
2. Makarov, V.L. Methods of Operator Interpolation / V.L. Makarov, V.V. Khlobystov, L.A. Yanovich. – К. : Ін-т математики НАН України, 2010. – Т. 83. – 517 с.
3. Треногин, В.А. Функциональный анализ / В.А. Треногин. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. – 496 с.
4. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – 3-е изд. – М. : Наука, 1967. – 575 с.