К вопросу об апостериорном выборе числа итераций в итерационном методе решения некорректных задач

Самцов Владислав Анатольевич

Студент 4 курса физико-математического факультета УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина"

Научный руководитель: доцент кафедры прикладной математики и информатики УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина", кандидат физико-математических наук, доцент *Савчук В.Ф.*

В гильбертовом пространстве H для решения уравнения I рода

$$Ax = y_\delta, \tag{1}$$

где $\|y - y_\delta\| \le \delta$ и A – положительный ограниченный несамосопряженный оператор, для которого нуль не является собственным значением, но принадлежит спектру, применяется итерационный метод

$$z_{n+1} = (E - \alpha A^* A)^2 z_n + A^{-1}[E - (E - \alpha A^* A)^2] y_\delta + \\ +(E - \alpha A^* A)^2 u_n, \; z_0 \epsilon H. \tag{2}$$

Здесь $0 < \alpha \le \frac{5}{4\|A^*A\|}$, u_n – ошибки вычислений, $\|u_n\| \le \beta$. Обозначим $C = (E - \alpha A^* A)^2, B = A^{-1}[E - (E - \alpha A^* A)^2]$, тогда (2) примет вид $z_{n+1} = Cz_n + \mathrm{B} y_\delta + Cu_n$. Предположим, что при точной правой части y уравнение (1) имеет единственное точное решение x.

Применение правила останова по соседним приближениям

$$\|z_{n+1} - z_n\| > \varepsilon, \; \|z_{m+1} - z_m\| \le \varepsilon, \; \varepsilon > 0$$

к методу (2) делает его эффективным и тогда, когда нет сведений об истокопредставимости точного решения x уравнения (1). Справедлива

<u>Теорема.</u> Пусть уровень останова $\varepsilon = \varepsilon(\delta, \beta)$ выбирается как функция от уровней δ и β норм погрешностей $y - y_\delta$ и u_n, тогда справедливы следующие утверждения:

a) если $\varepsilon(\delta, \beta) > 2\|C\|\beta$, то момент останова m определен при любом начальном приближении $z_0 \in H$ и любых y_δ и u_n, удовлетворяющих условиям $\|y - y_\delta\| \le \delta$, $\|u_n\| \le \beta$;

b) если $\varepsilon(\delta, \beta) > \|B\|\delta + 2\|C\|\beta$, то справедлива оценка

$$m = \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)};$$

c) если, кроме того, $\varepsilon(\delta, \beta) \to 0$, $\delta, \beta \to 0$ и $\varepsilon(\delta, \beta) \ge d(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p)$, где $d > 1$ и $p \in (0,1)$, то $\lim_{\delta,\beta \to 0} \|z_m - x\| = 0$.