Методы полного и неполного прогноза для решения систем нелинейных уравнений

Сивуда Евгений Владимирович

Студент 3-его курса специальности прикладная математика физико-математического факультета УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина"

Научный руководитель: старший преподаватель кафедры прикладной математики и информатики УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина", магистр физико-математических наук Кондратюк А.П.

Требуется решить нелинейное уравнение вида

$$f(x)=0,\ f: D\subset X\to X. \tag{1}$$

Причём $f\in C_D^{(2)}$, оператор $f'(x)$ непрерывно обратим. $f'(x)$ - производная по Фреше и в D существует x^*- решение уравнения (1).

Неполный прогноз коррекции.

Пусть $f\in C_D^{(2)}$, $\left\|\left[f'(x)\right]^{-1}\right\|\le L$, $\left\|f''(x)\right\|\le K$, $\forall x\in D$.

Шаг 1. Решается линейное уравнение относительно Δx_n:

$$f'(x_n)\Delta x_n=-f(x_n)\ \text{n=0,1,2,...} \tag{2}$$

Шаг 2. Вносится поправка в вектор

$$x_{n+1}=x_n+\beta_n\Delta x_n,\ n=0,1,2,\ldots,\ \beta_0\in\left[10^{-3};10^{-1}\right] \tag{3}$$

Шаг 3. Если $\|f(x_{n+1})\|<\varepsilon$,где ε - малая величина, то конец просчётов, иначе переход на шаг 4.

Шаг 4. Определяется новая шаговая длина: если $\|f(x_{n+1})\|<\|f(x_n)\|$, то $\beta_{n+1}=1$, , иначе

$$\beta_{n+1}=\min\left(1,\frac{\|f(x_n)\|\gamma_n}{\|f(x_{n+1})\|\beta_n}\right),\ \gamma_{n+1}=\frac{\|f(x_n)\|\gamma_n}{\|f(x_{n+1})\|},\ n=0,1,2,\ldots,\quad \gamma_0=\beta_0^2 \tag{4}$$

и осуществляется переход на шаг 1.

Полный прогноз коррекции.

Шаг 1. Решается линейное уравнение относительно поправки Δx_n

$$f'(x_n)\Delta x_n=-f(x_n),\ n=0,1,2,\ldots \tag{5}$$

Шаг 2. Вносится поправка в вектор x_n

$$x_{n+1}=x_n+\beta_n\Delta x_n,\ \beta_0\in\left[10^{-3},1\right] \tag{6}$$

Шаг 3. Если $\|f(x_{n+1})\|<\varepsilon$, ε (параметр останова), то конец просчетов, иначе переход на шаг 4.

Шаг 4. Определяется новая шаговая длина: если $\|f(x_{n+1})\| < \|f(x_n)\|$, то β_n принимает значение 1, иначе

$$\beta_n = \min\left(1, \frac{\|f(x_0)\|\gamma_n}{\|f(x_{n+1})\|\gamma_{n+1}}\right) \qquad (7)$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\beta_n \|f(x_{n+1})\| \|f(x_{n+1})\|}{\beta_{n-1} \|f(x_n)\| \|f(x_{n+1})\|}\gamma_n \qquad (8)$$

$$\gamma_0 = \frac{\beta_0^2 \|f(x_1)\|}{\|f(x_0)\|}, \quad \beta_0 \in [10^{-3}, 1] \qquad (9)$$

и осуществляется переход на шаг 1.[1]
Решение системы

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-2} + x_{n-1} + x_n = n+1 \\ x_1 + 2x_2 + \ldots + x_{n-2} + x_{n-1} + x_n = n+1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-2} + 2x_{n-1} + x_n = n+1 \\ x_1 x_2 \ldots x_{n-2} x_{n-1} x_n = 1 \end{cases} \qquad (10)$$

производилось методом Ньютона, методом неполного прогноза и методом полного прогноза. Решения получены с точностью 10^{-12}, при n=50. Результаты вычислений сведены в следующую таблицу.

	Время решения(мсек)	Число итераций
Метод Ньютона	402	382
Метод неполного прогноза	251	332
Метод полного прогноза	85	40

В результате вычислительного эксперимента для системы (10) лучшим оказался метод полного прогноза (5) (9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мадорский В.М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений / В. М. Мадорский – Брест : Изд-во БрГУ, 2005. – 186 с.

2. Самарский А.А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. - 2-е изд. / А.А. Самарский, А.П. Михайлов, - М.: Физматлит, 2001. - 320 с.