Сходимость к решению с минимальной нормой явного итерационного метода решения операторных уравнений в случае неединственного решения

Смирнов Егор Евгеньевич

Студент 3 курса физико-математического факультета УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина"

Научный руководитель: доцент кафедры прикладной математики и информатики УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина", кандидат физико-математических наук, доцент *Савчук В.Ф.*

В гильбертовом пространстве H решается операторное уравнение

$$Ax = y \tag{1}$$

где A – ограниченный положительный и самосопряженный оператор. Нуль является собственным значением оператора A, т.е. задача (1) имеет неединственное решение и, следовательно, некорректна. Покажем, что в этом случае итерационный метод

$$x_{n+1} = (E - \alpha A^2)x_n + \alpha Ay, x_0 = 0 \tag{2}$$

сходится к решению с минимальной нормой (нормальному решению).

Обозначим через $N(A) = \{x \in H, Ax = 0\}$ – ядро оператора A, $M(A)$ – ортогольное дополнение ядра $N(A)$ до H. Пусть $P(A)x$ – проекция $x \in H$ на $N(A)$, а $\Pi(A)x$ – проекция $x \in H$ на $M(A)$. В [1] доказана

Теорема. Пусть $A = A^* \geq 0, y \in H, 0 < \alpha < \frac{2}{\|A\|^2}$, тогда для метода (2) справедливы утверждения:

а) $Ax_n \longrightarrow \Pi(A)y,\ \|Ax_n - y\| \longrightarrow \inf_{x \in R}\|Ax - y\|$;

б) процесс (2) сходится тогда и только тогда, когда уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо. В последнем случае $x_n \longrightarrow P(A)x_0 + x^*$, где x^*- минимальное решение уравнения (1).

Замечание. Так как из (2) $x_0 = 0$, то $x_n \longrightarrow x^*$, т. е. процесс (2) сходится к решению с минимальной нормой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Савчук, В. Ф. Регуляризация операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В. Ф, Савчук, О. В. Матысик. – Брест: Брест. гос. ун-т. – 2008. – 196 с.