Сходимость метода итераций решения некорректных уравнений к нормальному решению

Устинович Анна Сергеевна

Студентка 3 курса физико-математического факультета УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина"

Научный руководитель: заведующий кафедрой прикладной математики и информатики УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина", кандидат физико-математических наук, доцент *Матысик О.В.*

В гильбертовом пространстве H решается операторное уравнение

$$Ax = y, \tag{1}$$

где $A: H \to H$ – оператор положительный, ограниченный, самосопряженный. Предполагается, что 0 является собственным значением оператора A (случай неединственного решения уравнения (1)), поэтому рассматриваемая задача некорректна. Будем решать (1), используя явный итерационный метод

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_{n+1}(Ax_n - y), \quad x_0 = 0, \tag{2}$$

$$\alpha_{2n+1} = \alpha, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \alpha_{2n+2} = \beta, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Обозначим через $N(A) = \{x \in H \mid Ax = 0\}$, $M(A)$ – ортогональное дополнение ядра $N(A)$ до H. Пусть $P(A)x$ – проекция $x \in H$ на $N(A)$, а $\Pi(A)x$ – проекция $x \in H$ на $M(A)$. Справедлива

Теорема. *Пусть* $A \geq 0$, $y \in H$, $0 < \alpha < 2$, $(\alpha + \beta)^2 < 8\alpha\beta$, $\alpha\beta < \alpha + \beta$, *тогда для итерационного процесса* (2) *верны следующие утверждения*:

а) $Ax_n \to \Pi(A)y$, $\|Ax_n - y\| \to J(A, y) = \inf\limits_{x \in H} \|Ax - y\|$;

в) *метод* (2) *сходится тогда и только тогда, когда уравнение* $Ax = \Pi(A)y$ *разрешимо. В последнем случае* $x_n \to P(A)x_0 + x^*$, *где* x^* *– минимальное решение уравнения.*

Доказательство. Применим оператор A к методу (2), получим $Ax_n = A(E - \alpha_n A)x_{n-1} + \alpha_n Ay$, где $y = P(A)y + \Pi(A)y$. Так как $AP(A)y = 0$, то $Ax_n = A(E - \alpha_n A)x_{n-1} + \alpha_n A\Pi(A)y$. Отсюда

$$\begin{aligned} Ax_n - \Pi(A)y &= A(E - \alpha_n A)x_{n-1} + \alpha_n A\Pi(A)y - \Pi(A)y = \\ &= A(E - \alpha_n A)x_{n-1} - (E - \alpha_n A)\Pi(A)y = (E - \alpha_n A)(Ax_{n-1} - \Pi(A)y) = \\ &= (E - \alpha_n A)(E - \alpha_{n-1})\ldots(E - \alpha_1 A)(Ax_0 - \Pi(A)y). \end{aligned}$$

Обозначим $\nu_n = Ax_n - \Pi(A)y$, тогда $\nu_n = (E - \alpha_n A)(E - \alpha_{n-1}A)\ldots(E - \alpha_1 A)\nu_0$. Имеем $A \geq 0$ и A – положительно определен в $M(A)$, т. е.

$(Ax,x)>0\ \forall x\in M(A)$. Так как $0<\alpha<2$, $(\alpha+\beta)^2<8\alpha\beta$ и $\alpha\beta<\alpha+\beta$, то $|1-\alpha\lambda|<1$ и $|(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)|<1$. Воспользовавшись интегральным представлением самосопряженного оператора A (для упрощения считаем, что $\|A\|=1$), получим

$$\|\nu_n\|=\left\|\int_0^1(1-\alpha_1\lambda)(1-\alpha_2\lambda)\ldots(1-\alpha_n\lambda)dE_\lambda\nu_0\right\|=\left\|\int_0^1(1-\alpha\lambda)^l(1-\beta\lambda)^m dE_\lambda\nu_0\right\|.$$

Здесь $l,m-$натуральные показатели, $l+m=n$, $l=m=\left[\frac{n}{2}\right]$ или $l=m+1$.

Справедлива цепочка неравенств

$$\|\nu_n\|\le\left\|\int_0^{\varepsilon_0}(1-\alpha\lambda)^l(1-\beta\lambda)^m dE_\lambda\nu_0\right\|+\left\|\int_{\varepsilon_0}^1(1-\alpha\lambda)^l(1-\beta\lambda)^m dE_\lambda\nu_0\right\|\le$$

$$\le\left\|dE_{\varepsilon_0}\nu_0\right\|+q^{n/2}(\varepsilon_0)\left\|\nu_0-E_{\varepsilon_0}\nu_0\right\|<\varepsilon,\ (n-\text{чётное})$$

при $\varepsilon_0\to0$, $n\to\infty$. Здесь $q=\max\limits_{\lambda\in[\varepsilon_0,1]}|(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)|<1$. Следовательно, $\nu_n\to0$, откуда $Ax_n\to\Pi(A)y$ и $\Pi(A)y\in A(H)$. Таким образом, имеем $\|Ax_n-y\|\to\|\Pi(A)y-y\|=\|P(A)y\|=J(A,y)$ [1]. Итак, а) доказано.

Докажем в). Пусть процесс (2) сходится. Покажем, что уравнение $Ax=\Pi(A)y$ разрешимо. Из сходимости $\{x_n\}\in H$ к $z\in H$ и из а) следует, что $Ax_n\to Az=\Pi(A)y$, следовательно, $\Pi(A)y\in A(H)$, и уравнение $\Pi(A)y=Ax$ разрешимо.

Пусть теперь $\Pi(A)y\in A(H)$ (уравнение $Ax=\Pi(A)y$ разрешимо), следовательно, $\Pi(A)y=Ax^*$, где x^*- минимальное решение уравнения $Ax=y$ (оно единственно в $M(A)$). Тогда (2) примет вид

$$x_n=(E-\alpha_nA)x_{n-1}+\alpha_ny=(E-\alpha_nA)x_{n-1}+\alpha_n\Pi(A)y=$$
$$=(E-\alpha_nA)x_{n-1}+\alpha_nAx^*=x_{n-1}+\alpha_nA\left(x^*-x_{n-1}\right).$$

Разобьем последнее равенство на два:

$$P(A)x_n=P(A)x_{n-1}+\alpha_nP(A)A\left(x^*-x_{n-1}\right)=P(A)x_{n-1}=P(A)x_0,$$

так как $AP(A)\left(x^*-x_{n-1}\right)=0$.

$$\Pi(A)x_n=\Pi(A)x_{n-1}+\alpha_nA\Pi(A)\left(x^*-x_{n-1}\right)=$$
$$=\Pi(A)x_{n-1}+\alpha_nA(\Pi(A)x^*-\Pi(A)x_{n-1})=\Pi(A)x_{n-1}-\alpha_nA\left(\Pi(A)x_{n-1}-x^*\right),$$

так как $x^* \in M(A)$ и, следовательно, $\Pi(A)x^* = x^*$.

Тогда $\Pi(A)x_n - x^* = \Pi(A)x_{n-1} - x^* - \alpha_n A\left(\Pi(A)x_{n-1} - x^*\right)$. Обозначив $\omega_n = \Pi(A)x_{n-1} - x^*$, получим

$$\omega_n = \omega_{n-1} - \alpha_n A\omega_{n-1} = (E - \alpha_n A)\omega_{n-1} = (E - \alpha_1 A)(E - \alpha_2 A)\ldots(E - \alpha_n A)\omega_0 .$$

Аналогично ν_n, можно показать, что $\omega_n \to 0$, $n \to \infty$. Таким образом, $\Pi(A)x_n \to x^*$. Следовательно, $x_n = P(A)x_n + \Pi(A)x_n \to P(A)x_0 + x^*$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матысик, О. В. Итерационная регуляризация некорректных задач / О. В. Матысик. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 188 с.