Правило останова по поправкам в неявном методе итераций решения некорректных уравнений

Жуковец Маргарита Николаевна

Магистрант физико-математического факультета УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина"

Научный руководитель: заведующий кафедрой прикладной математики и информатики УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина", кандидат физико-математических наук, доцент *Матысик О.В.*

В гильбертовом пространстве H решается операторное уравнение

$$Ax = y_\delta, \tag{1}$$

где $A: H \to H$ – оператор положительный, ограниченный, несамосопряженный и $\|y - y_\delta\| \le \delta$. Предполагается, что $0 \in S_A$ (но не является собственным значением оператора A), поэтому рассматриваемая задача некорректна. Пусть при точной правой части y уравнение имеет единственное решение x. Будем искать его, используя неявный итерационный метод

$$z_{n+1} = Cz_n + By_\delta + Cu_n, \quad z_0 \in H, \tag{2}$$

где $C = \left(E + \alpha A^* A\right)^{-1}\left(E - \alpha A^* A\right)$, $B = \left(E + \alpha A^* A\right)^{-1} 2\alpha A^*$, $\alpha > 0$, а u_n – ошибки в вычислении итераций (причем $\|u_n\| \le \beta$).

Предложенный метод можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по поправкам [1–2].

Зададим уровень останова $\varepsilon > 0$ и момент останова m определим условиями

$$\|z_n - z_{n+1}\| > \varepsilon, \left(n < m\right), \quad \|z_m - z_{m+1}\| \le \varepsilon. \tag{2}$$

Справедливы

Лемма 1. *Пусть приближение* ω_n *определяется условиями* $\omega_0 = z_0$, $\omega_{n+1} = C\omega_n + By + Cu_n$, $n \ge 0$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\sum_{k=0}^{n} \|\omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k\|^2 \le \|\omega_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2.$$

Лемма 2. *При* $\forall \omega_0 \in H$ *и произвольной последовательности ошибок* $\{u_n\}$, *удовлетворяющих условию* $\|u_n\| \le \beta$, *выполнено неравенство* $\varliminf_{n\to\infty} \|\omega_n - \omega_{n+1}\| \le 2\|C\|\beta$.

Теорема. *Пусть уровень останова* $\varepsilon = \varepsilon(\delta, \beta)$ *выбирается как функция от уровней* δ *и* β *норм погрешностей* $y - y_\delta$ *и* u_n. *Тогда справедливы утверждения:*

а) если $\varepsilon(\delta,\beta) > 2\|C\|\beta$, *то момент останова* m *определен при любом начальном приближении* $z_0 \in H$ *и любых* y_δ *и* u_n, *удовлетворяющих условиям* $\|y - y_\delta\| \le \delta$, $\|u_n\| \le \beta$;

б) если $\varepsilon(\delta,\beta) > \|B\|\delta + 2\|C\|\beta$, *то справедлива оценка*

$$m \le \frac{\|z_0 - x\|^2}{\left(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta\right)\left(\varepsilon - \|B\|\delta\right)};$$

в) если, кроме того, $\varepsilon(\delta,\beta) \to 0$, $\delta,\beta \to 0$ и $\varepsilon(\delta,\beta) \ge d\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p\right)$, *где* $d > 1$, $p \in (0,1)$, *то* $\lim\limits_{\delta,\beta\to 0}\|z_m - x\| = 0$, *т. е. приближения* (2) *сходятся к точному решению уравнения* (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матысик, О. В. Итерационная регуляризация некорректных задач / О. В. Матысик. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 188 с.

2. Емелин, И. В. Правило останова в итерационных процедурах решения некорректных задач / И. В. Емелин, М. А. Красносельский // Автоматика и телемеханика. – 1978. – № 12. – С. 59–63.