Сходимость неявного метода итераций решения линейных уравнений в случае априорного выбора параметра регуляризации

Басина Сабина Игоревна

Студентка 4 курса физико-математического факультета УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина"

В действительном гильбертовом пространстве H решается операторное уравнение первого рода

$$Ax = y, \qquad (1)$$

где A – ограниченный положительный самосопряжённый оператор. Предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора A, но не является его собственным значением, т.е. рассматриваемая задача неустойчива, и, значит, некорректна. Будем искать решение уравнения (1), используя неявную схему метода итераций

$$x_{n+1} = x_n - \alpha\left(Ax_{n+1} - y\right), \quad x_0 = 0. \qquad (2)$$

В случае приближённой правой части y_δ, $\|y - y_\delta\| \le \delta$ метод (2) примет вид

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} - \alpha\left(Ax_{n+1,\delta} - y_\delta\right), \quad x_{0,\delta} = 0. \qquad (3)$$

Метод (3) впервые был предложен в работе [1]. Здесь показано, что метод (3) сходится при условии $\alpha > 0$, если число итераций n выбирать в зависимости от δ так, чтобы $n\delta \to 0$, $n \to \infty$, $\delta \to 0$. Там же получена оценка погрешности в предположении, что решение является истокообразно представимым с некоторым показателем $s > 0$.

Получим оценку погрешности метода (3) при приближённой правой части, отличную от оценки погрешности в [1] и, на наш взгляд, более удобную для практического использования. По индукции нетрудно показать, что $x_n = A^{-1}\left[E - (E + \alpha A)^{-n}\right]y$. Тогда, используя интегральное представление самосопряжённого оператора A, справедливо записать $x - x_n = \int_0^M \lambda^{-1}(1+\alpha\lambda)^{-n} dE_\lambda y$, $M = \|A\|$, где E_λ – спектральная функция. Для получения оценки погрешности предположим, что $x = A^s z, s > 0$. Тогда $y = A^{s+1}z$ и, следовательно, $x - x_n = \int_0^M \lambda^s (1+\alpha\lambda)^{-n} dE_\lambda z$. Найдём максимум подынтегральной функции $f(\lambda) = \lambda^s (1+\alpha\lambda)^{-n}$. Имеем $f'(\lambda) = 0$ при $\lambda_* = \dfrac{s}{(n-s)\alpha}$, $n > s$. Тогда при условии $n \ge 2s$

$$f(\lambda_*)=\left[\frac{s}{(n-s)\alpha}\right]^s\left[1+\frac{s\alpha}{(n-s)\alpha}\right]^{-n}=s^s\alpha^{-s}n^{-s}\left(\frac{n-s}{n}\right)^{n-s}=$$

$$=\left(\frac{s}{n\alpha}\right)^s\left(1+\frac{s}{n-s}\right)^{-(n-s)}\leq\left(\frac{s}{n\alpha}\right)^s\cdot 2^{-s}=\left(\frac{s}{2n\alpha}\right)^s.$$

Нетрудно убедиться, что найденный локальный максимум функции является глобальным. Тогда получим $\|x-x_n\|\leq s^s\left(2n\alpha\right)^{-s}\|z\|$. По индукции нетрудно показать, что $\|x_n-x_{n,\delta}\|\leq n\alpha\delta$. Следовательно,

$$\|x-x_{n,\delta}\|\leq s^s\left(2n\alpha\right)^{-s}\|z\|+n\alpha\delta. \quad (4)$$

Итак, доказана

Теорема 1. *Если решение* x *уравнения* (1) *истокопредставимо* ($x=A^s z,\ s>0$)*, то при условии* $\alpha>0$ *для метода итераций* (3) *справедлива оценка* (4).

Оптимизируем по n оценку (4), т. е. при заданном δ найдём такое значение числа итераций n, при котором оценка (4) становится минимальной. Для этого производную по n от правой части неравенства (4) приравняем нулю. Получим априорный момент останова (параметр регуляризации)

$$n_{\text{опт}}=s\alpha^{-1}2^{-s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}\delta^{-1/(s+1)}. \quad (5)$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в (4), получим оптимальную оценку погрешности для метода (3)

$$\|x-x_{n,\delta}\|_{\text{опт}}\leq(1+s)2^{-s/(s+1)}\delta^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}. \quad (6)$$

Итак, доказана

Теорема 2. *Оптимальная оценка погрешности для метода* (3) *имеет вид* (6) *и получается при* $n_{опт}$ *из* (5).

Сравним метод (3) с известным явным методом простых итераций [2]

$$x_{n+1,\delta}=(E-\alpha A)x_{n,\delta}+\alpha y_\delta,\quad x_{0,\delta}=0. \quad (7)$$

Сравнение метода (3) с явным методом простых итераций (7) показывает, что для явного метода оценки погрешности лучше по константе. Кроме того, явные методы не требуют обращения оператора, а требуют только вычисления значений оператора на последовательных приближениях. В этом смысле метод (7) предпочтительнее неявного метода (3).

Но неявные методы обладают следующим важным достоинством. В явных методах на параметр α накладывается ограничение сверху (для метода (7) $0<\alpha\leq\frac{5}{4\|A\|}$), что может привести к необходимости большого числа итераций. В неявных методах никаких ограничений сверху на $\alpha > 0$ нет. Это позволяет брать его произвольно большим (независимо от $\|A\|$). В связи с чем, оптимальную оценку погрешности для метода (3) можно получить уже на первых шагах итераций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Константинова, Я. В. Метод итераций неявного типа для уравнений I-ого рода и его сравнение с явным методом / Я. В. Константинова // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. I. – 1979. – № 1. – С. 63–65.
2. Матысик, О. В. Явные и неявные итерационные процедуры решения некорректно поставленных задач / О. В. Матысик. – Брест: Брест. гос. ун-т, 2014. – 213 с.