Итерационный метод явного типа решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве

Цырельчук Светлана Васильевна

УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина"

Для решения в действительном гильбертовом пространстве операторного уравнения I рода

$$Ax = y_\delta, \tag{1}$$

где $\| y - y_\delta \| \le \delta$, A — положительный ограниченный самосопряженный оператор (0 не является его собственным значением, но $0 \in SpA$, т.е. рассматриваемая задача некорректна) используем метод

$$x_{n+1,\delta} = \left(E - \alpha A^3\right) x_{n,\delta} + \alpha A^2 y_\delta, \; x_{0,\delta} = 0. \tag{2}$$

Воспользовавшись интегральным представлением положительно определенного самосопряжённого оператора A и формулой (2), по индукции получим $x - x_n = \int_0^M \lambda^{-1}(1-\alpha\lambda^3)^n dE_\lambda y$, где $M = \|A\|$, E_λ – спектральная функция оператора A. Отсюда легко выводится сходимость процесса (2) при $n \to \infty$ для $0 < \alpha < 2/M^3$.

Теорема 1. *Итерационный процесс* (2) *сходится при* $0 < \alpha < 2/M^3$, *если выбирать число итераций n в зависимости от* δ *так, чтобы* $n^{1/3}\delta \to 0$ *при* $n \to \infty, \delta \to 0.$

При этом при условии $0 < \alpha \le 5/(4M^3)$ легко показываются оценки: $\|x_n - x_{n,\delta}\| \le \left(\frac{5}{4}\right)^{2/3} 3n^{1/3}\alpha^{1/3}\delta, n \ge 1$ и $\|x_n - x_{n,\delta}\| \le 3n^{1/3}\alpha^{1/3}\delta, n \ge 2$.

Скорость сходимости метода (2) будем оценивать при дополнительном предположении о возможности истокообразного представления точного решения x уравнения (1), т. е. $x = A^s z, s > 0.$ Тогда $y = A^{s+1}z$, и, следовательно, получим $x - x_n = \int_0^M \lambda^s \left(1-\alpha\lambda^3\right)^n dE_\lambda z$. Для оценки $\|x - x_n\|$ найдём максимум модуля подынтегральной функции $f(\lambda) = \lambda^s(1-\alpha\lambda^3)^n$. Нетрудно показать, что при условии $0 < \alpha \le 5/(4M^3)$ справедливо неравенство

$\|x - x_n\| \le s^{s/3}(3n\alpha e)^{-s/3}\|z\|,\ n \ge 1$. Таким образом, общая оценка погрешности метода итераций (2) запишется в виде

$$\|x - x_{n,\delta}\| \le s^{s/3}(3n\alpha e)^{-s/3}\|z\| + \left(\frac{5}{4}\right)^{2/3} 3(n\alpha)^{1/3}\delta,\ n \ge 1, \quad (3)$$

$$\|x - x_{n,\delta}\| \le s^{s/3}(3n\alpha e)^{-s/3}\|z\| + 3(n\alpha)^{1/3}\delta,\ n \ge 2. \quad (4)$$

Для минимизации оценки погрешности (4) вычислим её правую часть в точке, в которой производная от нее равна нулю; в результате получим априорный момент останова $n_{\text{опт}} = s^{(s+3)/(s+1)} 3^{-(s+3)/(s+1)} \alpha^{-1} e^{-s/(s+1)} \|z\|^{3/(s+1)} \delta^{-3/(s+1)}$ и оптимальную оценку погрешности явного метода итераций (2) $\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}} \le$ $\le (1+s)(s/3)^{-2s/(3(s+1))} e^{-s/(3(s+1))} \|z\|^{1/(s+1)} \delta^{s/(s+1)}, n \ge 2$.

Очевидно, что оптимальная оценка погрешности не зависит от параметра α, но от него зависит $n_{\text{опт}}$. Поэтому для уменьшения $n_{\text{опт}}$ и, значит, объёма вычислительной работы, следует брать α по возможности большим, удовлетворяющим условию $0 < \alpha \le 5/(4M^3)$, и так, чтобы $n_{\text{опт}}$ было целым.