Регуляризация некорректных уравнений в энергетической норме гильбертова пространства

Карват Ульяна Марковна

УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина"

Для решения в действительном гильбертовом пространстве H линейного некорректного уравнения первого рода

$$Ax = y_\delta, \tag{1}$$

где $\| y - y_\delta \| \le \delta$, A — положительный ограниченный самосопряженный оператор (0 не является его собственным значением, но $0 \in SpA$, т.е. рассматриваемая задача некорректна) используем метод

$$\left(E + \alpha^2 A^2\right) x_{n+1,\delta} = (E - \alpha A)^2 x_{n,\delta} + 2\alpha y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0. \tag{2}$$

Рассмотрим поведение итераций (2) в энергетической норме $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$. Использование энергетической нормы позволяет получить оценки погрешности метода (2) без знания дополнительной информации на гладкость точного решения уравнения (1) – его истокообразную представимость: $x = A^s z,\ s > 0$.

Теорема 1. *Итерационный метод* (2) *при условии* $\alpha > 0$ *сходится в энергетической норме, если число итераций* n *выбирать так, чтобы* $n^{1/2}\delta \to 0, \quad n \to \infty, \quad \delta \to 0.$

Теорема 2. *Априорная оценка погрешности для метода* (2) *при условии* $\alpha > 0$ *имеет вид* $\left\| x - x_{n,\delta} \right\|_A \le (4n\alpha e)^{-1/2} \|x\| + (2n\alpha)^{1/2}\delta, \quad n \ge 1.$ *При априорном моменте останова* $n_{\text{опт}} = 2^{-3/2}\alpha^{-1}e^{-1/2}\|x\|\delta^{-1}$ *получена оптимальная оценка погрешности:* $\left\| x - x_{n,\delta} \right\|_A^{\text{опт}} \le 2^{3/4} e^{-1/4} \delta^{1/2} \|x\|^{1/2}$.

Очевидно, что для уменьшения количества итераций для достижения заданной точности следует брать α возможно большим из условия $\alpha > 0$, и так, чтобы $n_{\text{опт}} \in \mathrm{Z}$. За счёт того, что на α нет ограничений сверху, можно добиться, что оптимальная оценка погрешности для неявного метода (2) будет достигаться уже на первом шаге итерации.

Условия, когда из сходимости в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства H, дает

Теорема 3. *Если выполнены условия* 1) $E_\varepsilon x_{n,\delta} = 0$, 2) $E_\varepsilon x = 0$, *где* $E_\varepsilon = \int\limits_0^\varepsilon dE_\lambda$, ε *– фиксированное положительное число* $(0 < \varepsilon < \|A\|)$, *то из сходимости* $x_{n,\delta}$ *к* x *в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства.*

Доказательство.

Так как по условию теоремы 3 $E_\varepsilon x_{n,\delta} = 0$ и $E_\varepsilon x = 0$, то $E_\varepsilon (x_{n,\delta} - x) = 0$ и $\left(E_\varepsilon (x_{n,\delta} - x), x_{n,\delta} - x\right) = 0$, т. е. $\int\limits_0^\varepsilon d(E_\lambda\ (x_{n,\delta} - x), x_{n,\delta} - x) = 0$. Следовательно, $\int\limits_0^\varepsilon \frac{1}{\lambda} d(E_\lambda\ (x_{n,\delta} - x), A(x_{n,\delta} - x)) = 0$. Тогда получим, что

$$\|x_{n,\delta} - x\|^2 = \int\limits_0^M \frac{1}{\lambda} d(E_\lambda\ (x_{n,\delta} - x), A(x_{n,\delta} - x)) =$$

$$= \int\limits_0^\varepsilon \frac{1}{\lambda}\ d(E_\lambda\ (x_{n,\delta} - x), A(x_{n,\delta} - x)) + \int\limits_\varepsilon^M \frac{1}{\lambda}\ d(E_\lambda\ (x_{n,\delta} - x), A(x_{n,\delta} - x)) =$$

$$= \int\limits_\varepsilon^M \frac{1}{\lambda}\ d(E_\lambda\ (x_{n,\delta} - x), A(x_{n,\delta} - x)) \le \frac{1}{\varepsilon} \|x_{n,\delta} - x\|_A^2 .$$

Теорема 3 доказана.

Замечание. *Так как* [1] $x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^{2n}\left(E + \alpha^2 A^2\right)^{-n}\right] y_\delta$, *то для того, чтобы* $x_{n,\delta}$ *удовлетворяло условию* $E_\varepsilon x_{n,\delta} = 0$, *достаточно потребовать, чтобы* $E_\varepsilon y_\delta = 0$. *Таким образом, если* $E_\varepsilon x = 0$ *и* $E_\varepsilon y_\delta = 0$, *то из сходимости метода итераций* (2) *в энергетической норме следует его сходимость в обычной норме пространства* H.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Савчук, В. Ф. Регуляризация операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В. Ф, Савчук, О. В. Матысик. – Брест: Брест.гос. ун-т. – 2008. – 196 с.