Метод последовательных приближений для уравнений второго рода с нормальными операторами

Михайлов Артём Викторович, Серапин Евгений Александрович

УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина"

В работе М.А. Красносельского [2, 3] было показано, что для уравнения

$$x = Ax + f, \tag{1}$$

с самосопряжённым оператором A в гильбертовом пространстве X, удовлетворяющим условию $\|A\| \le 1$ и не имеющим -1 собственным значением, последовательные приближения

$$Ax_{n+1} = Ax_n + f \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{2}$$

при любом начальном условии $x_n \in X$ сходятся к одному из решений этого уравнения, если эти решения существуют. Анализ доказательства теоремы М.А. Красносельского показывает, что эти последовательные приближения сходятся к решению x_*, для которого $Px_* = Px_0$, где P – оператор проектирования на подпространство $\mathrm{Fix}\,A$. Представляет интерес вопрос о том, можно ли распространить утверждение теоремы М.А. Красносельского на другие классы операторов, отличные от самосопряжённых операторов. Один из таких классов образуют нормальные операторы. Несложные примеры показывают, что аналог теоремы М.А. Красносельского для нормальных операторов несправедлив.

Действующий в банаховом пространстве X оператор A принято называть [4, 5] *корректным*, если последовательность операторов A^n ($n = 1, 2, \ldots$) сильно сходится к некоторому линейному оператору P; нетрудно видеть, что P является коммутирующим с A в пространстве X проектором на подпространство $X_0 = \mathrm{Fix}\,A$ неподвижных точек оператора A. Оказывается, что в предположениях теоремы М.А. Красносельского оператор является корректным; более того, свойство корректности и влечёт за собой справедливость утверждения теоремы М.А. Красносельского.

Теорема 1. *Пусть A – непрерывный линейный оператор в банаховом пространстве X, $\rho(A) = 1$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(a) *оператор A корректный;*

(b) *пространство* X *разлагается в прямую сумму инвариантных для* A *подпространств* $X_0 = \mathrm{Fix}\, A$, *и* $X^{\omega} = \left\{x : \lim_{n\to\infty} A^n x = 0\right\}$;

(c) *последовательность норм* $\left\|A^n\right\|$ *ограничена, подпространства* $X_0 = \mathrm{Fix}\, A$ *и* $X^{\omega} = \left\{x : \lim_{n\to\infty} A^n x = 0\right\}$ *замкнуты и их сумма плотна в* X;

(d) *для оператора* A *справедливо утверждение теоремы М.А. Красносельского.*

Как известно, каждый нормальный оператор представим единственным образом в виде

$$A = UB, \tag{3}$$

где A – неотрицательно определенный и самосопряженный, а U унитарный операторы, коммутирующие между собой.

Теорема 2. *Пусть* A *нормальный оператор. Тогда оператор является корректным, в том и только том случае, если выполнено одно из следующих эквивалентных утверждений:*

(a) *унитарная часть оператора* A *является ортопроектором;*

(b) *справедливо равенство* $\mathrm{Fix}\, A = \mathrm{Fix}\, B$, *или, иначе,* $X_{\omega} = X_0$*;*

(c) *равенство* $\|Ax\| = \|x\|$ *(* $x \in X$ *) влечет равенство* $Ax = x$*;*

(d) *равенство* $A^* Ax = x$ *(* $x \in X$ *) влечет равенство* $Ax = x$*;*

(e) *равенство* $Bx = x$ *(* $x \in X$ *) влечет равенство* $Ax = x$*;*

(f) *спектральная мера* $P(\cdot)$ *единичной окружности без точки* 1 *равна нулю:* $P\left(S \setminus \{1\}\right) = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Забрейко, П.П. Об обобщении теоремы М.А. Красносельского на несамосопряжённые операторы / П.П. Забрейко, А.В. Михайлов. // Доклады НАН Беларуси, том 58, математика. – 2014. – № 2. – С. 16–21.
2. Красносельский, М.А. О решении методом последовательных приближений уравнений с самосопряженными операторами / М.А. Красносельский. // Успехи математических наук, XV, вып. 3 (93). – 1960. С. – 161–165.
3. Приближенное решение операторных уравнений / М.А. Красносельский, [и др.]; М.: Н., Главная редакция физико-математической литературы. – Москва, 1969. – 456 с.

4. Двадцатая проблема Гильберта. Обобщенные решения операторных уравнений / С.И. Ляшко, [и др.]; Москва & Санкт-Петербург & Киев: Диалектика. – Москва, 2009. – 185 с.
5. Generalized Solutions of Operator Equations and Extreme Elements / D.A. Klyushin, [etc]; Springer. – Ukraine, 2012. – 210 с.