Визуализация поведения приближенных решений операторного уравнения в некорректном случае

Минзер Екатерина Николаевна

УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина"

1. Правило останова по невязке. В гильбертовом пространстве H решается операторное уравнение первого рода $Ax = y_\delta$, где A – ограниченный, положительный, самосопряженный оператор, для которого нуль не является собственным значением. Пусть $0 \in SpA$, тогда рассматриваемая задача некорректна. Здесь $\|y - y_\delta\| \le \delta$. Предположим, что при точной правой части y существует единственное решение x операторного уравнения. Для его отыскания применим явный двухшаговый метод итераций

$$x_{n,\delta} = 2(E - \alpha A)x_{n-1,\delta} - (E - \alpha A)^2 x_{n-2,\delta} + \alpha^2 A y_\delta,\ x_{0,\delta} = x_{1,\delta} = 0. \quad (1)$$

Здесь E – тождественный оператор, $0 < \alpha \le 5\big/\left(4\|A\|\right)$ – итерационный параметр.

Метод (1) можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по невязке, аналогичным [1]. Зададим уровень останова $\varepsilon > 0$ и определим момент m останова условиями

$$\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon,\ (n < m),\ \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \le \varepsilon,\ \varepsilon = b\delta,\ b > 1. \quad (2)$$

Ниже метод итерации (1) с правилом останова (2) является сходящимся, если $\lim\limits_{\delta \to 0}\left(\inf\limits_m \|x - x_{m,\delta}\|\right) = 0$. Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $A = A^* \ge 0,\ \|A\| \le M$ *и пусть момент останова* $m = m(\delta)$ *в методе* (1) *выбирается по правилу* (2). *Тогда* $x_{m(\delta),\delta} \to x$ *при* $\delta \to 0$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и пусть* $x = A^s z,\ s > 0$. *Тогда справедливы оценки* $m(\delta) \le 2 + \frac{s+1}{\alpha e}\left[\frac{(s+3)\|z\|}{(b-2)\delta}\right]^{1/(s+1)}$,

$$\|x_{m(\delta),\delta} - x\| \le 2^{1/(s+1)}\left[(b+2)\delta\right]^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)} + \frac{5}{4}\alpha\left\{1 + \frac{s+1}{\alpha e}\left[\frac{(s+3)\|z\|}{(b-2)\delta}\right]^{1/(s+1)}\right\}\delta.$$

2. Численный модельный пример. В пространстве $L_2(0,1)$ рассматривается некорректная модельная задача в виде уравнения $\int\limits_0^1 K(t,s)\, x(s)\, ds = y(t),\quad 0 \le t \le 1$ с симметричным положительным ядром

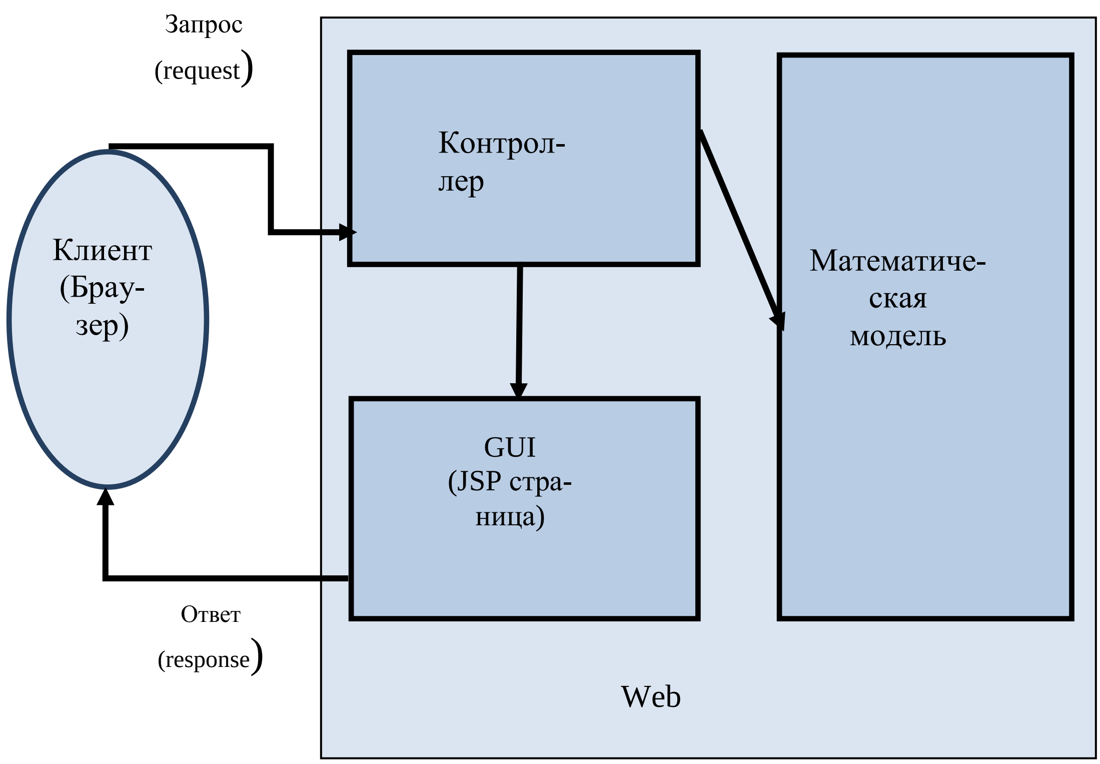
$K(t,s)=\begin{cases} t(1-s),\ 0\le t\le s\le 1,\\ s(1-t),\ 0\le s\le t\le 1,\end{cases}$ точной правой частью $y(t)=\dfrac{3t-5t^3+3t^5-t^6}{30}$ и точным решением $x(s)=s-2s^3+s^4$. Обычно на практике мы не знаем точной функции $y(t)$, а вместо нее известны значения приближенной функции $\tilde{y}(t)$ в некотором числе точек с определенной, часто известной погрешностью δ, и по этим приближенным данным требуется приближенно найти решение. Чтобы имитировать эту ситуацию, будем считать заданными значения $\tilde{y}_i$, $i=\overline{1,m}$, полученные следующим образом: $\tilde{y}_i=[\,y(t_i)\cdot 10^k+0{,}5]/10^k$, где $y(t_i)$ – значения функции $y(t)$ в точках $t_i=ih$, $i=\overline{1,m}$, $h=1/m$. Квадратные скобки означают целую часть числа и $k=3$. При $k=3$ величина погрешности $\delta=10^{-3}$. Заменим интеграл в уравнении квадратурной суммой с узлами $s_j=jh$, $j=\overline{1,m}$, $h=1/m$, т. е. $\int_0^1 K(t,s)x(s)ds\approx\sum_{j=1}^{m}K(t,s_j)hx_j$. Получим СЛАУ относительно приближенного решения $\sum_{j=1}^{m}K(t_i,s_j)hx_j=\tilde{y}_i$, $i=\overline{1,m}$. Выберем $m=32$ и будем решать полученную систему явным двухшаговым методом итераций (1) дискретная форма записи которого:

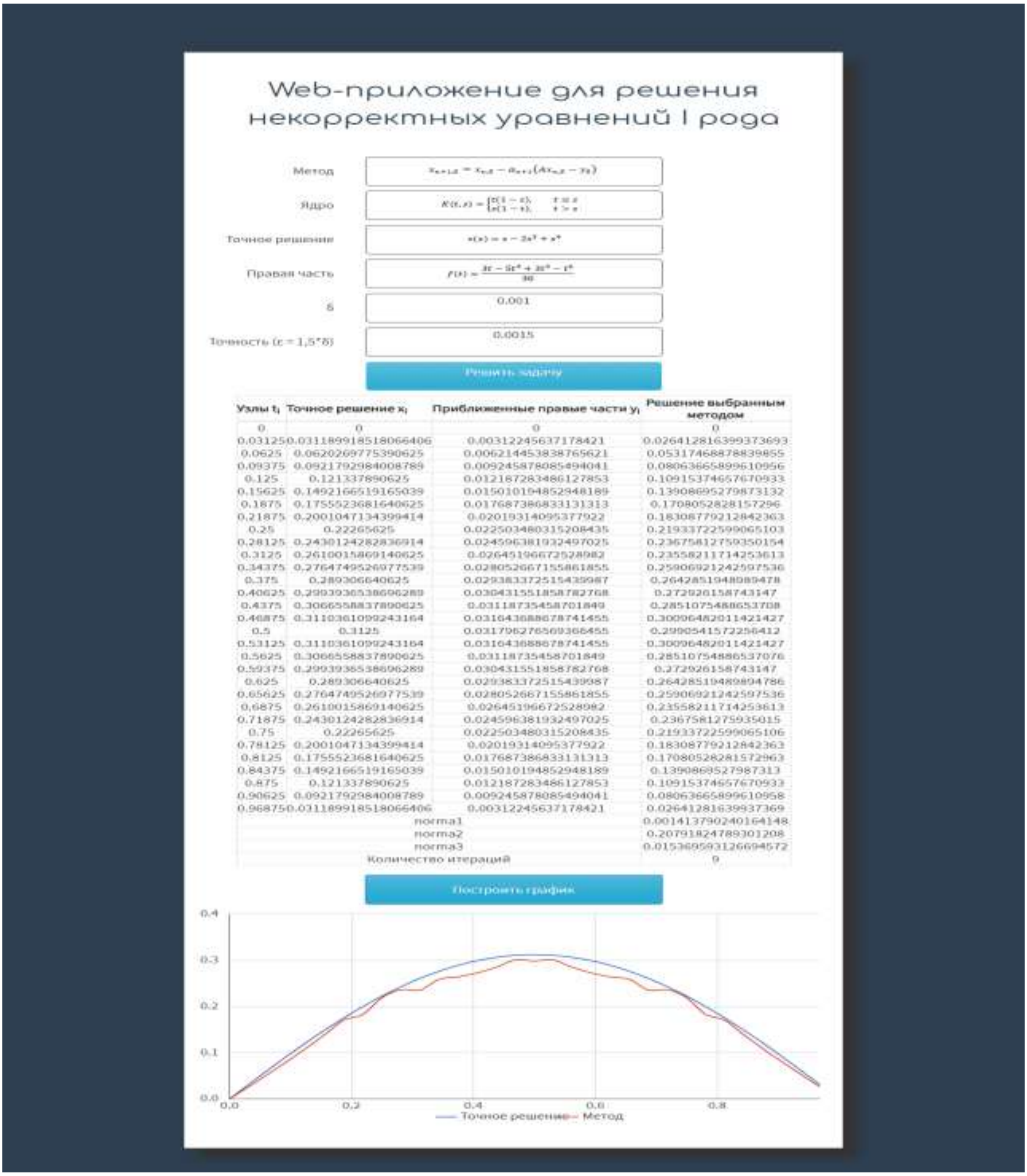
$$x_i^{(n)}=2x_i^{(n-1)}-2\alpha\sum_{j=1}^{m}K(t_i,s_j)hx_j^{(n-1)}-x_i^{(n-2)}+\alpha^2\sum_{j=1}^{m}K(t_i,s_j)h\tilde{y}_j+2\alpha\sum_{j=1}^{m}K(t_i,s_j)hx_j^{(n-2)}-$$
$$-\alpha^2\sum_{j=1}^{m}K(t_i,s_j)h\left(\sum_{k=1}^{m}K(t_j,s_k)hx_k^{(n-2)}\right),\ x_i^{(0)}=x_i^{(1)}=0,\quad i=\overline{1,m}.$$

При счете используется $\alpha=0{,}8$. Для решения задачи сведений об истокообразной представимости точного решения не потребовалось, так как здесь воспользовались правилом останова по малости невязки, выбрав $\varepsilon=1{,}5\delta$. Итак, при $\delta=10^{-3}$ для достижения оптимальной точности при счете явным двухшаговым итерационным процессом потребовалось 9 итераций.

3. Веб-сервис визуализации поведения приближенных решений. В работе спроектирован, создан и протестирован веб-сервис для реализации многофакторного анализа явной итерационной процедуры приближенного решения линейных некорректных уравнений Фредгольма первого рода с ограниченным самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве. Веб-приложение предоставляет возможность решения линейных некорректных задач с выбором различных значений *K(t, s), x(s), y(t),* визуализацию решения в виде графика. Также присутствует таблица с результатом вычислений (узлы, значение решения в этих узлах, приближенные правые части и т.д.). Сервис написан на стеке технологий *JAVAEE*. Для визуализации страницы сервиса использованы *JSP*-страницы. Расширение функциональных возможностей сервера реализовано с помощью *JAVASERVLET* [2]. Веб-приложение разворачивается в контейнере сервлетов *APACHETOMCAT* 8.5 (или какой-либо аналог). Готовое приложение представляло собой *WAR*архив.

Структура приложения





Узлы t_i	Точное решение x_i	Приближенные правые части y_i	Решение выбранным методом
0	0	0	0
0.03125	0.031189918518066406	0.00312245637178421	0.026412816399373693
0.0625	0.0620269775390625	0.006214453838765621	0.053174688788398855
0.09375	0.0921792984008789	0.009245878085494041	0.080636658996109566
0.125	0.121337890625	0.012187283486127853	0.10915374657670933
0.15625	0.1492166519165039	0.015010194852948189	0.13908695279873132
0.1875	0.175552368164062 5	0.017687386833131313	0.1708052828157296
0.21875	0.2001047134399414	0.02019314095377922	0.18308779212842363
0.25	0.22265625	0.022503480315208435	0.21933722599065103
0.28125	0.2430124282836914	0.024596381932497025	0.23675812759350154
0.3125	0.26100158691406 25	0.02645196672528982	0.23558211714253613
0.34375	0.2764749526977539	0.028052667155861855	0.25906921242597536
0.375	0.289306640625	0.029383372515439987	0.2642851948089478
0.40625	0.2993936538696289	0.030431551858782768	0.272926158743147
0.4375	0.3066558837890625	0.03118735458701849	0.2851075488653708
0.46875	0.3110361099243164	0.031643688678741455	0.30096482011421427
0.5	0.3125	0.031796276569366455	0.299054157225641 2
0.53125	0.3110361099243164	0.031643688678741455	0.30096482011421427
0.5625	0.3066558837890625	0.03118735458701849	0.28510754886537076
0.59375	0.2993936538696289	0.030431551858782768	0.272926158743147
0.625	0.289306640625	0.029383372515439987	0.2642851948989478 6
0.65625	0.2764749526977539	0.028052667155861855	0.25906921242597536
0,6875	0.2610015869140625	0.02645196672528982	0.23558211714253613
0.71875	0.2430124282836914	0.024596381932497025	0.2367581275935015
0.75	0.22265625	0.022503480315208435	0.21933722599065106
0.78125	0.2001047134399414	0.02019314095377922	0.18308779212842363
0.8125	0.1755523681640625	0.017687386833131313	0.17080528281572963
0.84375	0.1492166519165039	0.015010194852948189	0.1390869527987313
0.875	0.121337890625	0.012187283486127853	0.10915374657670933
0.90625	0.0921792984008789	0.009245878085494041	0.08063665899610958
0.96875	0.031189918518066406	0.00312245637178421	0.02641281639937369
	normal1		0.00141379024016414 8
	normal2		0.20791824789301208
	normal3		0.015369593126694572
	Количество итераций		9

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матысик, О. В. Итерационная регуляризация некорректных задач / О. В. Матысик. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 188 с.

2. Флэнаган, Д. JavaScript. Подробное руководство / Д. Флэнаган – 5-е издание; пер. с англ. – СПб: Символ-Плюс: под ред. А. Галунов, 2008. – 992 с.