Априорный выбор числа итераций в неявном методе решения линейных некорректных уравнений

Саващук Татьяна Андреевна

УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина"

В действительном гильбертовом пространстве H решается линейное уравнение $Ax = y$, где $A : H \to H -$ положительный ограниченный самосопряженный оператор ($0 \in SpA$, и, следовательно, рассматриваемая задача некорректна). Решать данную задачу будем при помощи неявной итерационной процедуры

$$\left(E + \alpha A^2\right)x_{n+1} = x_n + \alpha Ay, \ x_0 = 0. \tag{1}$$

В случае приближенной правой части y_δ $\left(\|y - y_\delta\| \le \delta\right)$ соответствующие методу (1) итерации примут вид

$$\left(E + \alpha A^2\right)x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha Ay_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0. \tag{2}$$

Воспользовавшись интегральным представлением положительного самосопряженного оператора A и формулой (1), по индукции получим $x - x_n = \int_0^M \lambda^{-1}(1+\alpha\lambda^2)^{-n} dE_\lambda y$, где $M = \|A\|$, $E_\lambda -$ спектральная функция оператора A. Отсюда легко выводится сходимость метода (1) при $n \to \infty$ для $\alpha > 0$.

Итерационный процесс (2) является сходящимся, если нужным образом выбирать число итераций n в зависимости от уровня погрешности δ. Справедлива [1]

Теорема. *Процесс* (2) *сходится при* $\alpha > 0$, *если выбирать число итераций n в зависимости от* δ *так, чтобы* $n^{1/2}\delta \to 0$ *при* $n \to \infty, \delta \to 0.$

При этом легко показывается оценка $\|x_n - x_{n,\delta}\| \le 2n^{1/2}\alpha^{1/2}\delta, \ n \ge 1.$

Скорость сходимости процедуры (1) будем оценивать при дополнительном предположении о возможности истокообразного представления точного решения x уравнения $Ax = y$, т. е. $x = A^s z, s > 0$. Тогда $y = A^{s+1}z$, и, следовательно, получим $x - x_n = \int_0^M \lambda^s\left(1+\alpha\lambda^2\right)^{-n} dE_\lambda z$. Для оценки $\|x - x_n\|$ найдем максимум модуля подынтегральной функции $f(\lambda) = \lambda^s(1+\alpha\lambda^2)^{-n}$. Нетрудно показать, что при условии $\alpha > 0$ справедливо неравенство $\|x - x_n\| \le s^{s/2}(4n\alpha)^{-s/2}\|z\|$. Таким образом, общая оценка погрешности итерационной процедуры (2) запишется в виде

$$\left\|x-x_{n,\delta}\right\| \leq \left\|x-x_n\right\| + \left\|x_n - x_{n,\delta}\right\| \leq s^{s/2}(4n\alpha)^{-s/2}\left\|z\right\| + 2(n\alpha)^{1/2}\delta,\, n \geq 1.$$

Для минимизации оценки погрешности вычислим ее правую часть в точке, в которой производная от нее равна нулю; в результате для процедуры (2) получим априорный момент останова

$$n_{\text{опт}} = 2^{-s/(s+1)}\left(\frac{s}{2}\right)^{(s+2)/(s+1)} \alpha^{-1}\left\|z\right\|^{2/(s+1)}\delta^{-2/(s+1)}$$

и оптимальную оценку погрешности

$$\left\|x-x_{n,\delta}\right\|_{\text{опт}} \leq (1+s)\cdot s^{-s/(2(s+1))}\delta^{s/(s+1)}\left\|z\right\|^{1/(s+1)}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матысик, О. В. Итерационная регуляризация некорректных задач / О. В. Матысик. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 188 с.