О сходимости явного итерационного метода решения линейных уравнений в случае неединственного решения

Шостакович Ирина Олеговна

УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина"

В последние десятилетия в математической науке выделился важный раздел – теория некорректно поставленных задач. Проблема решения некорректных задач и разработки новых методов их приближенного решения актуальна, поскольку такие задачи часто встречаются в технике, физике, экономике и других естественных науках.

В гильбертовом пространстве H для решения операторного уравнения

$$Ax = y, \tag{1}$$

где A – ограниченный положительный самосопряженный оператор, используется явный метод итерации

$$x_n = (E - \alpha A)^2 x_{n-1} + 2\alpha y - \alpha^2 Ay,\ x_0 = 0, \tag{2}$$

E – тождественный оператор.

Здесь 0 является собственным значением оператора A (т.е. линейное операторное уравнение (1) имеет неединственное решение). Пусть $N(A) = \{x \in H \,|\, Ax = 0\}$ – ядро оператора A, $M(A)$ – ортогональное дополнение ядра $N(A)$ до H. Пусть далее $P(A)x$ – проекция $x \in H$ на $N(A)$, $\Pi(A)x$ – проекция $x \in H$ на $M(A)$. Справедлива

Теорема [1]. Пусть $A \geq 0,\ y \in H,\ 0 < \alpha < 2/\|A\|$, тогда для итерационного метода (2) справедливы утверждения:

а) $Ax_n \to \Pi(A)y$, $\|Ax_n - y\| \to J(A, y) = \inf\limits_{x \in H} \|Ax - y\|$;

б) метод (2) сходится тогда и только тогда, когда уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо, в последнем случае $x_n \to P(A)x_0 + x^*$, где x^* – минимальное решение уравнения (1).

Доказательство.

Применим оператор A к методу (2) и получим

$$Ax_n = A(E - \alpha A)^2 x_{n-1} + \left[E - (E - \alpha A)^2\right]\left[P(A)y + \Pi(A)y\right],$$

где $y = P(A)y + \Pi(A)y$. Так как $AP(A)y = 0$, то справедливо равенство $Ax_n = A(E-\alpha A)^2 x_{n-1} + \left[E-(E-\alpha A)^2\right]\Pi(A)y$. Последнее равенство запишется в виде $v_n = (E-\alpha A)^2 v_{n-1}$, где $v_n = Ax_n - \Pi(A)y$ и $v_n \in M(A)$. Отсюда $v_n = (E-\alpha A)^{2n} v_0$. Имеем $A \geq 0$ и A – положительно определён в $M(A)$, т. е. $(Ax,x) > 0 \quad \forall x \in M(A)$. Так как $0 < \alpha < \frac{2}{\|A\|}$, то $\|E-\alpha A\| < 1$, поэтому справедлива цепочка неравенств

$$\|v_n\| = \left\|(E-\alpha A)^{2n} v_0\right\| = \left\|\int_0^{\|A\|}(1-\alpha\lambda)^{2n}\,dE_\lambda v_0\right\| \leq \left\|\int_0^{\varepsilon_0}(1-\alpha\lambda)^{2n}\,dE_\lambda v_0\right\| +$$

$$+\left\|\int_{\varepsilon_0}^{\|A\|}(1-\alpha\lambda)^{2n}\,dE_\lambda v_0\right\| \leq \left\|\int_0^{\varepsilon_0} dE_\lambda v_0\right\| + q^n(\varepsilon_0)\left\|\int_{\varepsilon_0}^{\|A\|} dE_\lambda v_0\right\| = \left\|E_{\varepsilon_0} v_0\right\| +$$

$$+q^n(\varepsilon_0)\left\|v_0 - E_{\varepsilon_0} v_0\right\| < \varepsilon$$

при $\varepsilon_0 \to 0$, $n \to \infty$ (здесь $|1-\alpha\lambda| \leq q(\varepsilon_0) < 1$ при $\lambda \in \left[\varepsilon_0, \|A\|\right]$). Следовательно, $v_n \to 0$, откуда $Ax_n \to \Pi(A)y$ и $\Pi(A)y \in A(H)$. Таким образом, $\|Ax_n - y\| \to \|\Pi(A)y - y\| = \|P(A)y\| = I(A,y)$. Итак, а) доказано.

Докажем б). Пусть процесс (2) сходится. Покажем, что уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо. Из сходимости $\{x_n\} \in H$ к $z \in H$ и из а) следует $Ax_n \to Az = \Pi(A)y$, следовательно, $\Pi(A)y \in A(H)$ и уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо.

Пусть теперь $\Pi(A)y \in A(H)$ (уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо), следовательно, $\Pi(A)y = Ax^*$, где x^* – минимальное решение уравнения $Ax = y$ (оно единственно в $M(A)$). Тогда метод (2) имеет вид

$$x_n = (E-\alpha A)^2 x_{n-1} + A^{-1}\left[E-(E-\alpha A)^2\right]\Pi(A)y = (E-\alpha A)^2 x_{n-1} +$$

$$+A^{-1}\left[E-(E-\alpha A)^2\right]Ax^* = (E-\alpha A)^2 x_{n-1} +$$

$$+\left[E-(E-\alpha A)^2\right]x^* = x_{n-1} + \left[E-(E-\alpha A)^2\right]\left(x^* - x_{n-1}\right).$$

Разобьём последнее равенство на два:

$$P(A)x_n = P(A)x_{n-1} + P(A)\left[E-(E-\alpha A)^2\right]\left(x^* - x_{n-1}\right) =$$

$$= P(A)x_{n-1} + \left[E-(E-\alpha A)^2\right]P(A)\left(x^* - x_{n-1}\right) = P(A)x_{n-1} = P(A)x_0,$$

так как $AP(A)\left(x^{*}-x_{n-1}\right)=0$;

$$\Pi(A)x_n=\Pi(A)x_{n-1}+\Pi(A)\left[E-(E-\alpha A)^2\right]\left(x^{*}-x_{n-1}\right)=$$
$$=\Pi(A)x_{n-1}-\left[E-(E-\alpha A)^2\right]\left(\Pi(A)x_{n-1}-\Pi(A)x^{*}\right)=$$
$$=\Pi(A)x_{n-1}-\left[E-(E-\alpha A)^2\right]\left(\Pi(A)x_{n-1}-x^{*}\right),$$

так как $x^{*}\in M(A)$.

Обозначим $w_n=\Pi(A)x_{n-1}-x^{*}$, тогда $w_n=(E-\alpha A)^2 w_{n-1}$ и, аналогично v_n, можно показать, что $w_n\to 0,\ n\to\infty$. Следовательно, $\Pi(A)x_n\to x^{*}$. Отсюда $x_n=P(A)x_n+\Pi(A)x_n\to P(A)x_0+x^{*}$. Теорема доказана.

Замечание. Так как в нашем случае $x_0=0$, то $x_n\to x^{*}$, т. е. процесс (2) сходится к решению с минимальной нормой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матысик, О. В. Явные и неявные итерационные процедуры решения некорректно поставленных задач / О. В. Матысик. – Брест: Брест. гос. ун-т, 2014. – 213 с.