Неявные разностные схемы для решения нелинейного параболического уравнения

Сивуда Евгений Владимирович

УО "Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина"

Будем рассматривать на примере первой краевой задачи для полулинейного параболического уравнения. В области $\{0 < x < l, 0 < t \leq T\}$ требуется найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda u^m \tag{1.1}$$

удовлетворяющие начальному условию

$$u(x,0) = \mu_0(x) \tag{1.2}$$

и граничным условиям

$$\mu(0,t) = \mu_1(t), \; u(l,t) = \mu_2(t) \tag{1.3}$$

Здесь $\mu_0(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ - заданные функции. Известно[1], что при определенных предположениях гладкости решение задачи (1.1) – (1.3) существует и единственно. В дальнейшем при исследовании аппроксимации разностных схем будем предполагать, что решение $u = u(x,t)$ обладает необходимым по ходу изложения числом производных по x и по t. Решение задачи (1.1) – (1.3) удовлетворяет принципу максимума и тем самым непрерывно зависит от начальных и граничных данных.

Введем сетку по переменной x.

$$\omega_h = \left\{x_i = ih, i = \overline{0,N}, hN = 1\right\},$$

и сетку по переменной t с шагом τ, которую обозначим $\omega_\tau = \{t_n = n\tau, n = \overline{0,K}, \tau K = T\}$.

Для функции $y(x,t)$, определенной на сетке $\omega_{h,\tau}$, введем обозначения

$$y_i^n = y(x_i, t_n),\; y_{t,i}^n = \frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau}, \quad y_{\bar{x}x,i}^n = \frac{y_{i+1}^{n+1} - 2y_i^{n+1} + y_{i-1}^{n+1}}{h^2}. \tag{1.4}$$

Чисто неявной разностной схемой для уравнения теплопроводности (схемой с опережением) называется разностная схема, использующая шаблон (x_i, t_n), $(x_{i\pm1}, t_{n+1})$, (x_i, t_{n+1}) и имеющая следующий вид для линейного уравнения

$$\begin{gathered}\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \frac{y_{i+1}^{n+1} - 2y_i^{n+1} + y_{i-1}^{n+1}}{h^2} + \varphi_i^n \\ i = 1,2,\dots,N-1,\; n = 0,1,\dots,K-1 \\ y_0^{n+1} = \mu_1(t_{n+1}), \quad y_N^{n+1} = \mu_2(t_{n+1}),\; n = 0,1,\dots,K-1, \\ y_i^0 = u_0(x_i),\; i = 1,2,\dots,N.\end{gathered} \tag{1.5}$$

Здесь $\varphi_i^n = f(u(x_i, t_{n+1})) + O(\tau + h^2)$. Схема имеет первый порядок аппроксимации по τ и второй – по h. Схема (1.5) является абсолютно устойчивой, это является основным преимуществом неявных схем.[1]

Качество полученного решения также зависит от способа аппроксимации нелинейного источника $Q(u) = \lambda u^m$. Опишем некоторые подходы аппроксимации источника. В случае представления $Q(u) = \varphi(\hat{y})$, где $\hat{y}$ - стандартное обозначение [2], разностная схема для полулинейного параболического уравнения приводит к системе нелинейных уравнений, которую в общем случае можно, например, решать методом Ньютона и его модификациями. Одним из частных случаев является степенная функция

$Q(u) = \lambda u^m$, где $m > 1$. Аппроксимация такого нелинейного источника может быть представлена следующим образом:

1) $y^{m-1}\hat{y}$ - специальное усреднение по Стеклову [3] позволяет привести к системе линейных уравнений;
2) y^m - приводит к системе линейных уравнений;
3) $\hat{y}^m$ - приводит к системе нелинейных уравнений.

Вид 2) и 3) может влиять на время разрушения решения разностной задачи, так по 3) время может быть ближе ко времени разрушения дифференциальной задачи.[4]

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский, А.А. Введение в теорию разностных схем / А.А. Самарский; гл. ред. Физ-мат. лит. – Москва: Наука. 1971. - 553 с.
2. Самарский, А. А. Численные методы / А.А. Самарский, А.В Гулин; гл. ред. физ-мат. лит. – Москва: Наука. -1989. - 432с.
3. Matus, P. Exact Differense schemes for time-dependent problems / P. Matus, U. Irkhin, M. Lapinska-Chrzczonowicz.// Comp. Meth. Appl. Math. 2005. Vol. 5. N. 4. P. 422–448.
4. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений / А.А. Самарский [и др.]; гл. ред. Физ-мат. лит. – Москва: Наука. 1987. - 480 с.